VI — Anneaux, sous-anneaux et idéaux

Exercice 1 Soit $A = \{a_0 + ... + a_n \frac{X^n}{n!} \ : \ n \in \mathbb{N},\, a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}\}$

a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.

b) Montrer l'inclusion stricte des idéaux :

$$(X) < (X, \frac{X^2}{2}) \ .$$

c) Montrer l'égalité des idéaux $(X, \frac{X^2}{2!}, ..., \frac{X^5}{5!}) = (X, \frac{X^2}{2!}, ..., \frac{X^5}{5!}, \frac{X^6}{6!})$.

d) Montrer que l'idéal $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}}(X, \frac{X^2}{2!}, ..., \frac{X^n}{n!})$ n'est pas de type fini.

Exercice 2 Soit A un aneau commutatif unitaire et $I < A$ un idéal propre de A.

a) Montrer que A/I intègre $\Leftrightarrow$ I idéal premier.

b) Montrer que A/I corps $\Leftrightarrow$ I idéal maximal.

Exercice 3 Soit p un nombre premier. Soit $A = \mathbb{Z}[X]$.

a) Montrer que l'idéal (p, X) n'est pas un idéal principal.

b) Montrer que l'idéal $(p, X)^n$ † peut être engendré par $n + 1$ éléments mais non moins.

Exercice 4 a) Factoriser 2 et 5 dans $\mathbb{Z}[i]$.

b) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(3)$ est un corps de cardinal 9.

c) Montrer que $\mathbb{Z}[j]/(2)$ est un corps de cardinal 4.

Exercice 5 a) Déterminer les éléments inversibles des anneaux suivants :

$$\mathbb{C}[X], \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[j], \mathbb{Z}[\sqrt{2}],$$

$\mathbb{D}$ l'anneau des décimaux,

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{a}{2^n} \ : \ a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \ : \ a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z} \text{ impair}\},$$

$$\mathbb{C}[[X]] = \{\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \ : \ \forall\, n,\, a_n \in \mathbb{C}\} \text{ l'anneau des séries formelles.}$$

†. Si I, J sont des idéaux, IJ est l'idéal engendré par les ij, $i \in I$, $j \in J$.

b) Montrer que les idéaux des anneaux

$$\mathbb{D}, \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], \mathbb{Z}_{(2)}, \mathbb{C}[[X]]$$

sont respectivement

$$(x),\ x \in \mathbb{Z} \text{ premier à } 10$$

$$(x),\ x \in \mathbb{Z} \text{ premier à } 2$$

$$(2^k),\ k \in \mathbb{N}$$

$$(X^k),\ k \in \mathbb{N}\ .$$

Exercice 6 Calculs dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$
Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
On considère les idéaux :

$$P_1 = (2, 1 + i\sqrt{5}),\ P_2 = (3, 1 + i\sqrt{5}),\ P_3 = (3, 1 - i\sqrt{5})\ .$$

a) Déterminer $A^\times$.

b) Vérifier que $2, 3, 1 \pm i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans l'anneau A.

c) Montrer que P_1, P_2, P_3 sont trois idéaux maximaux distincts de A.

d) Montrer les égalités :

$$(2) = P_1^2,\ (3) = P_2P_3,\ (1 + i\sqrt{5}) = P_1P_2,\ (1 - i\sqrt{5}) = P_1P_3\ .$$

Exercice 7 a) Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X]$.

b) Soit $I \leqslant \mathbb{C}[X, Y]$ un idéal premier non nul. Montrer que I contient un polynôme irréductible.

c) En déduire que les idéaux premiers non nuls de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont les idéaux principaux (P), où $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ est irréductible, et les idéaux de la forme $(X - x, Y - y)$, $(x, y \in \mathbb{C}$ (qui sont maximaux et ne sont pas principaux).
Indication. Si $P \in I$ est un polynôme irréductible et si $I \neq (P)$, alors $I \cap \mathbb{C}[X] \neq 0$.