VII — Exemples d'anneaux principaux non euclidiens

Exercice 1 Soit $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$.

a) Vérifier que A est intègre et en utilisant $N = |\cdot|^2$, montrer que $A^* = \{\pm 1\}$.

b) Supposons par l'absurde que A est euclidien avec un stathme $\nu : A \backslash \{0\} \to \mathbb{N}$. Soit $x \in A$ irréductible avec $\nu(x)$ minimal. Montrer que $A^* \cup \{0\} \to A/(x)$ est surjective.

c) Déterminer le cardinal de $A/(2)$ et $A/(3)$.

d) En faisant la division euclidienne de 2 par x, montrer que $x = \pm 2$ ou $x = \pm 3$ et aboutir à une contradiction.

e) Soient $a, b \in A$ tels que $0 \neq b$ ne divise pas a. Montrer qu'il existe $p, q \in A$ tels que $N(p\frac{a}{b} - q) < 1$. *Indications. Supposons* $\frac{a}{b} = x + iy$ *avec* $0 \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{19}}{4}$. *Traiter séparément les cas où* $0 \leqslant y < \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et où* $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{19}}{4}$.

f) Soit $I \leqslant A$ un idéal non nul. Soit $0 \neq x \in I$ tel que $N(x)$ est minimal. En utilisant la question précédente, montrer que $I = (x)$.

Exercice 2 Soit $A = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$.

a) Montrer que $A = \mathbb{R}[y] \oplus \mathbb{R}[y]x$ où $x = X \bmod (X^2 + Y^2 + 1)$, $y = Y \bmod (X^2 + Y^2 + 1)$.

b) Montrer que le noyau du morphisme d'anneaux $\mathbb{R}[X, Y] \to \mathbb{C}[e^{\pm it}]$, $P(X, Y) \mapsto P(i \cos t, i \sin t)$ a pour noyau $(X^2 + Y^2 + 1)$. en déduire que A est intègre.

c) Montrer que $A^* = \mathbb{R}^*$.

d) Soit $0 \neq f \in A$, montrer que $\dim A/(f) < \infty$.

e) Supposons par l'absurde que A est euclidien avec un stathme $\nu : A \backslash \{0\} \to \mathbb{N}$. Soit $0 \neq f \in A$ irréductible avec $\nu(f)$ minimal.
Montrer que $A^* \cup \{0\} \to A/(f)$ est surjectif et trouver une contradiction.

f) Soit $0 \neq I \leqslant A$ un idéal. On suppose que $\dim A/I = 2d$ est pair. En considérant $1, Y, X, Y^2, YX, ..., Y^d, Y^{d-1}X$ trouver un élément $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que $f\overline{f} \in I$ † et $\deg f\overline{f} \leqslant 2d$. Montrer que $(f\overline{f}) = I$. *Indication. En utilisant la suite exacte*

$$0 \longrightarrow A/(f) \xrightarrow{\cdot \overline{f}} A/(f\overline{f}) \longrightarrow A/(\overline{f}) \longrightarrow 0$$

montrer que $\dim A/(f) = \deg f\overline{f} = 2 \deg f$.

†. On pose $\overline{f} = f(-X, Y)$.

g) Soit $m \leqslant A$ un idéal maximal. Soit P tel que $m \cap \mathbb{R}[X] = P\mathbb{R}[X]$. Déduire de l'inclusion

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[X]/(P) \hookrightarrow A/m$$

que P est de degré pair et en déduire que m est principal.

h) Soit $0 \neq I \leqslant A$ un idéal. Justifier l'existence d'un idéal maximal m tel que $I \leqslant m$.

i) Soit $(I : m) := \{x \in A \ : \ xm \subseteq I\}$. Montrer que c'est un idéal et que $m.(I : m) = I$. En déduire que tout idéal est principal.