Devoir à rendre le 24/2/15

Exercice 1 Si K est un corps, le groupe des permutations paires $\mathfrak{A}_n$ agit sur le corps des fractions rationnelles $K(X_1, ..., X_n)$ par permutations des variables.

On note $j := \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$.

a) On pose $t_k := X_1 + j^k X_2 + j^{2k} X_3 \in \mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)$. On pose $y_1 := t_1^2/t_2$, $y_2 := t_2^2/t_1$, $y_3 := t_3$. Montrer que $y_1, y_2, y_3 \in K(X_1, X_2, X_3)^{\mathfrak{A}_3}$.

b) Montrer que $\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3) = \mathbb{C}(y_1, y_2, y_3, t_1)$.

c) Montrer que $[\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3) : \mathbb{C}(y_1, y_2, y_3)] \leq 3$ en remarquant que $t_1^3 = y_1^2 y_2$.

d) En déduire que $\mathbb{C}(y_1, y_2, y_3) = \mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)^{\mathfrak{A}_3}$.

e) Montrer que $y_1 = jz_1 + j^2 z_2$ pour certains $z_i \in \mathbb{Q}(X_1, X_2, X_3)$. Vérifier que $y_2 = j^2 z_1 + jz_2$.

f) En déduire que $\mathbb{Q}(X_1, X_2, X_3)^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{Q}(z_1, z_2, y_3)$.

Exercice 2 Soit $n \geq 1$. On note $s_1, ..., s_n \in \mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$ les polynômes symétriques élémentaires (tels que $(T - X_1)...(T - X_n) = T^n - s_1 T^{n-1} + ... + (-1)^n s_n$ dans $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n, T]$). L'objectif est de redémontrer que $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Q}[s_1, ..., s_n]$ en partant de l'égalité $\mathbb{Q}(X_1, ..., X_n)^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Q}(s_1, ..., s_n)$.

On pose $L := k(s_1, ..., s_n)$ et $L_i := L(x_{i+1}, ..., x_n)$, $0 \leq i \leq n$ $(L_n = L)$.

a) Vérifier que $[L_{i-1} : L_i] = i$ et $1, ..., x_i^{i-1}$ est une base de L_{i-1} comme L_i−espace vectoriel.

b) En déduire que $\{x_1^{a_1} ... x_n^{a_n} : \forall i,\ 0 \leq a_i \leq i-1\}$ est une base de $k(x_1, ..., x_n)$ comme L−espace vectoriel.

c) Soit A un anneau intègre. Soit $B \geq A$ un autre anneau. Soit $x \in B$ tel que :

$$x^d + a_1 x^{d-1} + ... + a_d = 0$$

pour certains $a_1, ..., a_d \in A$. Montrer que $A[x] = A + Ax + ... + Ax^{d-1}$.

d) En utilisant la question précédente, montrer que tout $g \in k[x_1, ..., x_n]$ est une combinaison $k[s_1, ..., s_n]$−linéaire de monômes $x_1^{a_1} ... x_n^{a_n}$ où $\forall i$, $0 \leq a_i \leq i-1$.

e) En déduire que $k[x_1, ..., x_n]^{\mathfrak{S}_n} = k[s_1, ..., s_n]$.

Exercice 3 Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal q.

a) Soit $n \geq 1$. Si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^n$, on pose $\widehat{v} := v_1 X_1 + ... + v_n X_n \in \mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n]$. On pose ensuite $F_n(T) := \prod_{v \in \mathbb{F}_q^n} (T - \widehat{v}) \in \mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n][T]$. Montrer que F_n est unitaire de degré q^n en T.

Soit $M_n(T) := \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & ... & X_n & T \\ X_1^q & X_2^q & ... & X_n^q & T^q \\ \vdots & ... & & & \\ X_1^{q^n} & X_2^{q^n} & ... & X_n^{q^n} & T^{q^n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n][T])$.

On pose $\Delta_n(T) := \text{dét}\,(M_n(T)) \in \mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n][T]$.

b) Montrer que $\Delta_n(T) = \Delta_{n-1}(X_n)F_n(T)$.

c) Vérifier que $\Delta_1(T) = X_1F_1(T)$ et en déduire que $\Delta_n(T) \neq 0$ pour tout n.

d) Montrer que $F_n(T) = T^{q^n} + \sum_{i=0}^{n-1} c_{n,i}T^{q^i}$ où les $c_{n,i} \in \mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n]$ sont homogènes de degré $q^n - q^i$.

e) Le groupe $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ agit à droite sur $\mathbb{F}_q(X_1, ..., X_n)$ par :

$$^\forall f \in \mathbb{F}_q[X_1, .., X_n],\ ^\forall g \in G,\ g.f(X_1, ..., X_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} g_{1j}X_j, ..., \sum_{j=1}^{n} g_{nj}X_j\right) .$$

Montrer que $\mathbb{F}_q(c_{n,0}, ..., c_{n,n-1}) \leq \mathbb{F}_q(X_1, ..., X_n)^G$, le corps des fonctions rationnelles invariantes par G. (*Indication on peut remarquer que si* $v \in \mathbb{F}_q^n$ *et* $g \in G$, $g.\widehat{v} = \widehat{g(v)}$.)

f) Montrer que X_n est de degré $\leq q^n - 1$ sur $\mathbb{F}_q(c_{n,0}, ..., c_{n,n-1})$. Puis que :

$$[\mathbb{F}_q(X_1, ..., X_n) : \mathbb{F}_q(c_{n,0}, ..., c_{n,n-1})] \leq (q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{n-1}) .$$

g) En déduire que $\mathbb{F}_q(X_1, ..., X_n)^G = \mathbb{F}_q(c_{n,0}, ..., c_{n,n-1})$.

h) En s'inspirant de l'exercice 2, en déduire que

$$\mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n]^G = \mathbb{F}_q[c_{n,0}, ..., c_{n,n-1}] .$$

i) Donner explicitement $c_{2,0}$ et $c_{2,1}$ lorsque $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.