Examen de rattrapage de théorie de Galois
mercredi 26 juin 2013
Durée 2h30
Documents autorisés

Exercice 1 *Soit K le corps de décomposition dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^8 - 2$ sur $\mathbb{Q}$.*

a) *Montrer que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i)$ et que $[K : \mathbb{Q}] = 16$.*

b) *On pose $K_1 := \mathbb{Q}(i)$, $K_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K_3 := \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$. Montrer que $\mathrm{Gal}(K/K_1) \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathrm{Gal}(K/K_2) \simeq D_8$ (le groupe diédral d'ordre 8), $\mathrm{Gal}(K/K_3) \simeq Q_8$ (on rappelle une présentation du groupe Q_8 : $Q_8 = \langle a, b \,:\, a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle$).*

Exercice 2 *Déterminer tous les polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ de degré ≤ 3. En déduire la décomposition de $X^8 + X$ sur $\mathbb{F}_2$.*

Exercice 3 *Soit $E := \mathbb{C}(X)$ le corps des fractions rationnelles complexes en une variable X. On note σ le $\mathbb{C}-$automorphisme de E tel que $\sigma(X) = jX$ (où $j := e^{2i\pi/3}$) et τ le $\mathbb{C}-$automorphisme de E tel que $\tau(X) = X^{-1}$.*

a) *Montrer que $\sigma^3 = \tau^2 = \mathrm{Id}$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. En déduire que le sous-groupe G de $\mathrm{Aut}(E)$ engendré par σ et τ est isomorphe au groupe diédral d'ordre 6.*

b) *Montrer que $[E : \mathbb{C}(X^3 + X^{-3})] \leq 6$ et en déduire que $E^G = \mathbb{C}(X^3 + X^{-3})$*

Exercice 4 *a)* *Combien y a-t-il de $5-$Sylow dans $\mathfrak{A}_5$? En déduire le cardinal de N, le normalisateur du sous-groupe engendré par le $5-$cycle (12345). Montrer que N est engendré par (12345) et $(14)(23)$.*

b) *Soit $P = X^5 - 5X + 12 \in \mathbb{Q}[X]$. Calculer $P(X-2)$ et en déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note G le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$ et on l'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$.*

c) *Factoriser le polynôme P sur $\mathbb{F}_3$ et en déduire que le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$ contient une double transposition.*

d) *Calculer le discriminant de P et en déduire que $G \leq \mathfrak{A}_5$.*

e) *Montrer que $|G| = 10$ ou 20 ou 30 ou 60.*

f) *En utilisant que $\mathfrak{A}_5$ est simple montrer que $|G| \neq 30$. Si $|G| \leq 20$, montrer que G contient un seul $5-$Sylow (qui est donc distingué dans G). En déduire que si $G \neq \mathfrak{A}_5$, $|G| = 10$ et $G \simeq D_{10}$.*

g) *On note r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 les racines de P dans $\mathbb{C}$. Justifier qu'elles sont deux à deux distinctes. On pose*

$$R := \prod_{1 \leq i < j \leq 5} (X - (r_i + r_j)) \ .$$

Montrer que R est un polynôme à coefficients entiers, unitaire de degré 10.

h) *On admet que :*

$$R = (X^5 - 5X^3 - 10X^2 + 30X - 36)(X^5 + 5X^3 + 10X^2 + 10X + 4) \ .$$

Montrer que $G \simeq D_{10}$.

Exercice 5 *a)* *Quel est le polynôme minimal de $z := e^{2i\pi/11}$ sur $\mathbb{Q}$? Montrer que l'extension $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$ est galoisienne cyclique d'ordre 10.*

b) *Montrer que $\mathbb{Q}(z) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(z + z^{-1})$ (indication : il y a une inclusion facile et on peut calculer $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(z + z^{-1})]$).*

c) *En déduire le degré du polynôme minimal P de $2\cos(2\pi/11)$ sur $\mathbb{Q}$ et déterminer P . Montrer que le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$ est cyclique d'ordre 5.*