Examen final de théorie de Galois

lundi 26 mai 2014

Durée : 3 heures

Documents autorisés

4,5

Exercice 1 Soit $P = X^3 + 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

0,5 a) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

b) Trouver a, b réels tels que :

1

+0,5 si formule pour a, b

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 1 = 0 \\ ab = -1 \end{cases}$$

et montrer que $a + b$ est racine de P.

1,5 c) Calculer le discriminant de P et montrer que $a + b$ est l'unique racine réelle de P.

1 d) L'extension $\mathbb{Q}(a + b)/\mathbb{Q}$ est-elle galoisienne ? Déterminer à isomorphisme près le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$.

8 **Exercice 2** Soit $P := X^6 + X^4 + X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. On note G le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$.

2 a) Montrer que P n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$.

1,5 b) Factoriser P sur $\mathbb{F}_2$ et montrer que G contient une transposition.

2,5 c) Montrer que 5 est une racine de P dans $\mathbb{F}_{11}$. On admettra que dans $\mathbb{F}_{11}[X]$, on a $P = (X - 5)Q$ où $Q \in \mathbb{F}_{11}[X]$ est irréductible. En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2 d) Montrer qu'un sous-groupe transitif de S_6 qui contient un 5−cycle et une transposition est S_6 tout entier. En déduire que $G \simeq S_6$.

7,5 **Exercice 3** a) Factoriser le polynôme $P := X^4 + 9$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$. En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que l'extension $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ est galoisienne et montrer que son groupe de Galois est $\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer tous les corps k tels que $\mathbb{Q} \leq k \leq \mathbb{Q}(x)$ *(donner simplement un générateur pour chacun d'eux).* 1,5 1,5 1

4

3,5 b) Montrer que $Q := X^4 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit $K \leq \mathbb{C}$ le corps de décomposition de Q sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$. Montrer que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe diédral d'ordre 8. Déterminer les extensions galoisiennes $k/\mathbb{Q}$ telles que $\mathbb{Q} \leq k \leq K$.

6,5 **Exercice 4** Soit p un nombre premier *impair*. On veut montrer qu'il n'existe pas de sous-corps $K \leq \mathbb{C}$ tel que $[\mathbb{C} : K] = p$. On raisonne par l'absurde : *on suppose qu'il existe un tel corps K.*

1 a) Montrer que $\mathbb{C}/K$ est galoisienne cyclique.

1,5 b) Montrer que $z := e^{2i\pi/p} \in K$. En déduire qu'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha_1^p =: a \in K$ et $\mathbb{C} = K(\alpha_1)$ *(indication : par exemple, calculer $N_{\mathbb{C}/K}(z)$ et utiliser le théorème 90 de Hilbert).*

1 0,5 c) Soit k un corps de caractéristique nulle. Soient $a \in k$ et α une racine de $X^p - a$ dans une extension de k. On suppose que $d := [k(\alpha) : k] < p$. Calculer $(N_{k(\alpha)/k}(\alpha))^p$ et en déduire que $a \in k^p := \{x^p \ : \ x \in k\}$. En déduire que si $X^p - a$ n'a pas de racines dans k alors $X^p - a$ est irréductible sur k.

2,5 d) Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines de $X^p - a$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $X^{p^2} - a = (X^p - \alpha_1) \ldots (X^p - \alpha_p)$. Montrer que $N_{K(\alpha_1)/K}(\alpha_1) = a$. En déduire, à l'aide de la question précédente, que $X^p - \alpha_1$ est irréductible sur $K(\alpha_1)$; trouver une contradiction.

$\begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix}$

$\frac{dX-b}{-cX+a}$

5,5 **Exercice 5** Soit p un nombre premier. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, on note φ_A l'automorphisme de $\mathbb{F}_p(X)$ tel que $\varphi_A(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$. anti-

1,5 a) Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p(X))$, $A \mapsto \varphi_A$ est un morphisme de groupes et déterminer son noyau. On note G l'image de ce morphisme. Trouver $|G|$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

+0,5 b) Montrer que $f := \frac{(X^{p^2}-X)^{p+1}}{(X^p-X)^{p^2+1}} \in \mathbb{F}_p(X)^G$ *(indication : on admettra que* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ *est engendré par les matrices* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{F}_p^\times$*).* $x-1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1 $\frac{-1}{-X}$

1 c) Montrer que $P := \prod_{x \in \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p} (X - x) \in \mathbb{F}_p[X]$ et exprimer f en fonction de P et $Q := X^p - X$.

1,5 d) Montrer que $[\mathbb{F}_p(X) : \mathbb{F}_p(f)] \leq p^3 - p$ puis que $\mathbb{F}_p(X)^G = \mathbb{F}_p(f)$.