Quelques rappels sur les Modules

Définition 1 *Soit A un anneau commutatif (avec 1) et M un groupe abélien. On dit que M est un $A-$module s'il existe $A \times M \to M$, $(a, m) \mapsto a.m$ telle que :*

$$\forall\, a, a' \in A, \forall\, m, m' \in M,\ a(a'.m) = (aa').m,\ 1.m = m,\ (a+a').m = a.m + a'.m,\ a.(m+m') = a.m + a.m' .$$

Si A est un corps, on dit que M est un $A-$espace vectoriel.

On peut définir les sommes, les sommes directes, les quotients de modules et les homomorphismes de $A-$modules comme pour les espaces vectoriels.

Soit M un $A-$module. Si $e_1, ..., e_n \in M$ et si $A^n \to M$, $(a_1, ..., a_n) \mapsto a_1e_1 + ... + a_ne_n$ est un isomorphisme, on dit que $(e_1, ..., e_n)$ est une *base* du $A-$module M. Un $A-$module n'a pas toujours de base (même s'il est sans torsion et de type fini !). On dit que M est un $A-$module libre s'il admet une base.

Exemples : les groupes abéliens sont des $\mathbb{Z}-$modules. Un idéal de A est un $A-$module.

Si M est un groupe abélien, si A est un anneau, donner une structure de $A-$module à M équivaut à donner un morphisme d'anneaux : $A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M)$.

Remarque : si M est un $A-$module et si le morphisme $A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M)$ est injectif, alors on dit que M est un $A-$module *fidèle*.

*

Espaces vectoriels	Modules M sur un anneau A		
E sur un corps K	A est principal	A est nœthérien	A quelconque
sans torsion *i.e.* $\lambda \in K$, $0 \neq v \in E$, $\lambda.v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$	si $M := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $A := \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ mais $n.M = 0$		
tout sous-espace a un supplémentaire	$2\mathbb{Z}$ n'a pas de supplémentaire dans $\mathbb{Z}$		
théorème de la base adaptée	Si $M := A := \mathbb{Z}$, on ne peut pas extraire une base de la famille génératrice $\{2, 3\}$; on ne peut pas compléter $\{2\}$ en une base		
Il existe toujours une base	$\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}-$module sans torsion qui n'a pas de base ; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}-$module de type fini qui n'a pas de base MAIS : un $A-$module libre de type fini sans torsion a toujours une base	$A := \mathbb{R}[X, Y]$, $M := (X, Y)$, M est un $A-$module de type fini sans torsion qui n'a pas de base	
Tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie	si A est nœthérien, un sous-module d'un module de type fini est aussi de type fini. *Dém* : il suffit de le démontrer pour A^n, par réc. sur n. *Ex* : $A := \mathbb{R}[X, Y]$, $M := (X, Y)^n$ peut être engendré par $n + 1$ éléments (mais pas moins)		$A := \mathbb{R}[XY^n : n \geq 0]$, $M := X\mathbb{R}[X, Y] \cap A$ est un sous-$A-$module de A qui n'est pas de type fini
Pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, injectif $\Leftrightarrow$ surjectif	pour un endomorphisme d'un $A-$module de **type fini**, surjectif $\Rightarrow$ injectif ; *c.-ex :* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $m \mapsto 2m$ est injectif non surjectif		

FIGURE 1 – quelques différences entre les modules et les espaces vectoriels