Théorie de Galois

Alexis TCHOUDJEM
Institut Camille Jordan
Université Claude Bernard Lyon I
Boulevard du Onze Novembre 1918
69622 Villeurbanne
FRANCE

Villeurbanne, le 5 mai 2015

Cours du mercredi 20/1/15

Introduction

0.1 Équations de degré 2

$$f(x) = x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q, x_1 - x_2 = \pm\sqrt{\Delta}$$

où $\Delta = (x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q$.

Donc :

$$x_1, x_2 = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2} \ .$$

Exercice : Vérifier que $2\cos(2\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $2\sin(2\pi/5) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

0.2 Méthode de Lagrange

0.2.1 Degré 3

Soit $P(X) := X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$. On note r_1, r_2, r_3 ses racines.

On pose $a := r_1 + jr_2 + j^2 r_3$. Si on applique tous les $s \in \mathfrak{S}_3$ à a^3, on obtient seulement deux valeurs :

$$a^3 \text{ et } b^3$$

où $b = r_1 + j^2 r_2 + jr_3$.

Donc $(X - a^3)(X - b^3)$ s'exprime simplement en fonction de p, q.

Explicitement :

$$(X - a^3)(X - b^3) = X^2 + 27qX - 27p^3$$

Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = 4.(27)^2((\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3)$.

Remarque : on a aussi $ab = -3p$.

On peut exprimer r_1, r_2, r_3 en fonction de a, b :

$$r_1 = \frac{a+b}{3},\ r_2 = \frac{j^2 a + jb}{3},\ r_3 = \frac{ja + j^2 b}{3},$$

Réciproquement, soient a, b des racines cubiques :

$$a := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$b := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

telles que $ab = -3p$.
Exercice : vérifier que c'est possible !
Alors si on pose :

$$r_1 = \frac{a+b}{3},\ r_2 = \frac{j^2a+jb}{3},\ r_3 = \frac{ja+j^2b}{3}$$

on a bien $(X-r_1)(X-r_2)(X-r_3) = X^3+pX+q$.
On a donc bien résolu notre équation avec des radicaux.
Exemples :

i) l'unique racine réelle de X^3-X-1 est :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{27}}}\ .$$

ii) X^3-3X+1 a 3 racines réelles mais aucune n'est *résoluble par radicaux réels* : c'est le *casus irreducibilis*. Une des racines est :

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{j}+\sqrt[3]{j^2}\ .$$

où on pose $\sqrt[3]{re^{it}} := r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{it}{3}}$ *si* $r>0$ *et* $-\pi<t<\pi$.

Exercice : Montrer que $2\cos(2\pi/7) = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7+21i\sqrt{3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{7-21i\sqrt{3}}{2}}\right)$
(indication : $1+2\cos(2\pi/7)+2\cos(4\pi/7)+2\cos(6\pi/7) = 0$ *et* $(2\cos 3t) = (2\cos t)^3-3(2\cos t)$*).*

0.2.2 Degré 4

Il y a aussi des formules avec des radicaux mais qui prennent beaucoup de places ...

Soient $p,q,r\in\mathbb{C}$.

On note r_1,r_2,r_3,r_4 les racines du polynôme $P := X^4+pX^2+qX+r$ *i.e.* :

$$P(X) = (X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)(X-r_4)\ .$$

On pose $t_1 := (r_1+r_2)(r_3+r_4)$, $t_2 := (r_1+r_3)(r_2+r_4)$, $t_3 := (r_1+r_4)(r_2+r_3)$. On a alors :

$$R(X) := (X-t_1)(X-t_2)(X-t_3) = X^3-2pX^2+(p^2-4r)X+q^2\ .$$

Remarque : $(t_1-t_2)^2(t_2-t_3)^2(t_1-t_3)^2 = (r_1-r_2)^2(r_2-r_3)^2(r_3-r_4)^2(r_1-r_3)^2(r_2-r_4)^2(r_1-r_4)^2 = 16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144pq^2r-27q^4+256r^3$.
Comme $r_1+r_2+r_3+r_4 = 0$, on a aussi :

$$(r_1+r_2)^2 = -t_1,\ (r_1+r_3)^2 = -t_2,\ (r_1+r_4)^2 = -t_3\ .$$

On peut donc retrouver r_1, r_2, r_3, r_4 à partir de t_1, t_2, t_3.
On choisit des racines carrées des $-t_i$ de sorte que :

$$r_1 + r_2 = \sqrt{-t_1},\ r_1 + r_3 = \sqrt{-t_2},\ r_1 + r_4 = \sqrt{-t_3}\ .$$

Remarque : on a forcément $\sqrt{-t_1}\sqrt{-t_2}\sqrt{-t_3} = -q$.
On a alors :

$$r_1 = \frac{\sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2} + \sqrt{-t_3}}{2}$$
$$r_2 = \frac{\sqrt{-t_1} - \sqrt{-t_2} - \sqrt{-t_3}}{2}$$
$$r_3 = \frac{-\sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2} - \sqrt{-t_3}}{2}$$
$$r_4 = \frac{-\sqrt{-t_1} - \sqrt{-t_2} + \sqrt{-t_3}}{2}\ .$$

Réciproquement, si on note t_1, t_2, t_3 les racines du polynôme :

$$R(X) := X^3 - 2pX^2 + (p^2 - 4r)X + q^2$$

si on choisit trois racines carrées $\sqrt{-t_1}, \sqrt{-t_2}, \sqrt{-t_3}$ telles que $\sqrt{-t_1}\sqrt{-t_2}\sqrt{-t_3} = -q$, et si on pose :

$$r_1 := \frac{\sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2} + \sqrt{-t_3}}{2}$$
$$r_2 := \frac{\sqrt{-t_1} - \sqrt{-t_2} - \sqrt{-t_3}}{2}$$
$$r_3 := \frac{-\sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2} - \sqrt{-t_3}}{2}$$
$$r_4 := \frac{-\sqrt{-t_1} - \sqrt{-t_2} + \sqrt{-t_3}}{2}\,,$$

alors :

$$X^4 + pX^2 + qX + r = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_4)(X - r_4)\ .$$

On a donc résolu notre équation par des radicaux.

0.3 Autres méthodes

0.3.1 Cardan

Pour résoudre $x^3 + px + q = 0$, on peut utiliser la méthode de Cardan qui est facile à retenir (ou à retrouver) :
On cherche une racine sous la forme $x = u + v$:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0\ .$$

Ça se simplifie si on impose $3uv = -p$:

$$u^3 + v^3 + q = 0 \ .$$

Donc si u, v vérifient

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -p/3 \end{cases}$$

alors $u + v, ju + j^2v, j^2u + jv$ sont racines. Plus précisément :

$$X^3 + pX + q = (X - (u + v))(X - (ju + j^2v))(X - (j^2u + jv))$$

où u^3, v^3 sont des racines de $T^2 + qT - p^3/27$ telles que $uv = -p/3$.

0.3.2 Euler

Pour résoudre $x^4 + px^2 + qx + r$ Euler procède ainsi :
On cherche une racine sous la forme $x = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{v}$.
Or,

$$x = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{v} \Rightarrow x^2 - u - v - w = 2(\sqrt{u}\sqrt{v} + \sqrt{u}\sqrt{w} + \sqrt{v}\sqrt{w})$$

$$\Rightarrow x^4 - 2(u+v+w)x^2 + (u+v+w)^2 = 4(uv+uw+vw) + 8(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{v})\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w}$$

Donc :

$$x^4 + px^2 + qx + r = (p + 2(u+v+w))x^2 + (q + 8\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w})x + r - (u+v+w)^2 + 4(uv+uw+vw).$$

Par conséquent :

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \Longleftarrow \begin{cases} u + v + w = -p/2 \\ \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w} = -q/8 \\ -(u + v + w)^2 + 4(uv + uw + vw) = -r \end{cases}$$

$$\Longleftarrow \begin{cases} u + v + w = -p/2 \\ \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w} = -q/8 \\ (uv + uw + vw) = \frac{(p/2)^2 - r}{4} \end{cases}$$

Il suffit donc de trouver $(*)$ u, v, w trois racines du polynôme $T^3 + \frac{p}{2}T^2 + (\frac{(p/2)^2 - r}{4})T - (\frac{q}{8})^2$ et trois racines carrées $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ telles que $\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w} = -q/8$.

On a ainsi résolu l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ car on peut vérifier que si u, v, w et $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ vérifient $(*)$, alors :

$$x^4 + px^2 + qx + r =$$

$$(x - (\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}))(x - (\sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w}))(x - (-\sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w}))(x - (-\sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w})).$$

0.4 Degré ≥ 5

On a : $x^5 - 2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$ où $x_k = \sqrt[5]{2}(\cos(2k\pi/5) + i\sin(2k\pi/5)) = \sqrt[5]{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)^k$. Donc $x^5 - 2 = 0$ est une équation « *résoluble par radicaux* ».

En revanche nous verrons plus tard que l'équation $x^5 - x - 1 = 0$ n'est pas résoluble par radicaux.

0.5 Caractéristique

Soit K un corps.

Définition 1 *Soit $p \geq 0$ tel que $p\mathbb{Z} = \ker(\varphi : \mathbb{Z} \to K, n \mapsto n1_K)$. Le nombre p est la caractéristique du corps K.*

Proposition 0.1 *La caractéristique de K est 0 ou un nombre premier > 0.*

Remarque : si $p = 0$, $\mathbb{Q}$ est le plus petit sous-corps de K. Si $p > 0$, c'est $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

0.6 Polynômes symétriques

Soit K un corps. Si $s \in \mathfrak{S}_n$, si $P \in K[X_1, ..., X_n]$, on note $P^s(X_1, ..., X_n) := P(X_{s(1)}, ..., X_{s(n)})$. (*C'est une action à droite*). On note $K[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ les polynômes invariants ou *polynômes symétriques.*

On note $\sigma_k(X_1, ..., X_n) := \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} X_{i_1}...X_{i_k}$ les *polynômes symétriques élémentaires* . On peut aussi les définir aussi par l'égalité :

$$(T - X_1)....(T - X_n) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + ... + (-1)^n$$

dans $K[X_1, ..., X_n][T]$.

Proposition 0.2 $K[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n} = K[\sigma_1, ..., \sigma_n]$

Démonstration : Par récurrence sur le degré donné par l'ordre lexicographique $X_1 > ... > X_n$. **Q.e.d.**

Remarque : c'est vrai si on remplace K par $\mathbb{Z}$!

Exercice : Si K est de caractéristique $\neq 2$, alors $K[X_1, ..., X_n]^{A_n} = K[\sigma_1, ..., \sigma_n] + \delta K[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ où $\delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_i - X_j)$ (*indication : soit P tel que $\forall\, \sigma$, $P^\sigma = \epsilon(\sigma)P$, alors P est divisible par δ (en effet, le monôme dominant de P est de la forme X^α avec $\alpha_1 > .... > \alpha_n$ qui est divisible par $X_1^{n-1}....X_{n-1}$, monôme dominant de δ)*).

Proposition 0.3 (relations coefficients-racines) *Soit* $P(X) := X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n \in K[X]$. *On suppose que* P *a* n *racines* $x_1, ..., x_n$ *dans une extension de* K i.e. *:*

$$P = (X - x_1)...(X - x_n) \ .$$

Alors $a_k = (-1)^k \sigma_k(x_1, ..., x_n)$.

conséquence : si par exemple $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n \in \mathbb{Z}[X]$ si on note $r_1, ..., r_n \in \mathbb{C}$ ses racines, alors tout polynôme $f \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ symétrique vérifie $f(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{Z}$.

Exercice : $X^n - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice :

a) soit $P(X) := X^3 + pX + q = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)$. Montrer que $(r_1 - r_2)^2(r_2 - r_3)^2(r_1 - r_3)^2 = -4p^3 - 27q^2$;

b) soit $P(X) := X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)$, alors $r_1 - r_2)^2(r_2 - r_3)^2(r_1 - r_3)^2 = a_1^2a_2^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_3^2 + 18a_1a_2a_3$

c) soit $P(X) := X^4 + pX^2 + qX + r = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)(X - r_4)$. Montrer que $(r_1 - r_2)^2(r_2 - r_3)^2(r_3 - r_4)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_4)^2(r_1 - r_4)^2 = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3$.

1 Extensions, algébricité

1.1 Polynômes irréductibles

Proposition 1.1 *Soit* K *un corps. Soit* $P \in K[X]$. *Alors* P *est irréductible* $\Leftrightarrow K[X]/(P)$ *est un corps.*

Remarque : $K[X]/(P)$ est un $K-$espace vectoriel de dimension $d = \deg P$.

1.2 Extensions, degré

Soient $K \leq L$ deux corps. On dit que L est une *extension de* K et on le note parfois L/K.

Dans ce cas L est aussi un $K-$espace vectoriel. On note $[L : K] := \dim_K L$: c'est le *degré de* L *sur* K.

Proposition 1.2 (multiplicativité des degrés) *Soient* $K_1 \leq ... \leq K_n$ *des corps. Alors* $[K_n : K_1] = [K_n : K_{n-1}]...[K_2 : K_1]$.

Démonstration : Supposons $n = 3$. Soit $(x_i)_i$ une base de K_2 comme K_1-espace vectoriel. Soit $(y_j)_j$ une base de K_3 comme K_2-espace vectoriel. Alors $(x_iy_j)_{i,j}$ est une base de K_3 comme K_1-espace vectoriel. **Q.e.d.**

Exemple : $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j) : \mathbb{Q}] = 6$.

1.3 Éléments algébriques

Proposition 1.3 *Soit $K \leq E$ une extension de corps. Soit $x \in E$. Sont équivalentes :*

(i) *il existe $0 \neq P \in K[X]$ tel que $P(x) = 0$;*

(ii) $\dim_K K[x]$ *est finie ;*

(iii) $K[x] = K(x)$.

On dit que x est *algébrique sur K* s'il existe un polynôme $P \in K[X]$ non nul tel que $P(x) = 0$.

Dans ce cas, $K[x] = K(x)$, $K[x]$ est un $K-$espace vectoriel de dimension finie.

De plus, l'idéal $\{P \in K[X] \ : \ P(x) = 0\}$ est un idéal premier non nul engendré par un unique polynôme unitaire P_x : le *polynôme minimal* de x sur K.

Remarque, P_x est irréductible sur K et si P est un polynôme irréductible sur K qui annule x, $P = cP_x$ pour un $c \in K^\times$.

On a : $[K[x] : K] = \deg P_x$: c'est le *degré de x sur K*.

Proposition 1.4 *L'ensemble $\{x \in E : x$ est algébrique sur $K\}$ est un sous-corps de E.*

Proposition 1.5 *Si $K \leq E$ est une extension finie (*i.e. $[E : K]$ *est fini), alors E est algébrique sur K* i.e. *tous les éléments de E sont algébriques sur K.*

Remarque : $\overline{\mathbb{Q}}$ est une extension algébrique infinie de $\mathbb{Q}$.

Cours du mardi 27 janvier 2015

Rappels sur les morphismes de corps

Soient K, L deux corps. Une application $\phi : K \to L$ est un morphisme de corps si $\forall\, x, y \in K$, $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, $\phi(1) = 1$.

Exercice : tout morphisme de corps est injectif !

Exercice : $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) = \{\mathrm{Id}\}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{Id}\}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{\mathrm{Id}\}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \left\{\mathrm{Id}, \sigma : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}\right\}$., $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = \{\mathrm{Id}, \tau : \sqrt[4]{2} \mapsto -\sqrt[4]{2}\}$.

1.4 Corps de rupture

Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible. Dans le corps $K[X]/(P)$, l'élément $\overline{X} := X \bmod P$ est une racine de P car $P(\overline{X}) = P(X) = 0 \bmod P$.

Théorème 1.6 *Soit L une extension de K et $\alpha \in L$ une racine de P telle que $K[\alpha] = L$. Alors $K[X]/(P) \to k[\alpha]$, $Q(X) \bmod P \mapsto Q(\alpha)$ est un isomorphisme de corps.*

Une extension L de K comme dans le théorème est un *corps de rupture de P sur K.*

En particulier $1, \alpha, ..., \alpha^{\deg P - 1}$ *est une $K-$base de α.*

Exemple : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(j\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(j^2\sqrt[3]{2})$ sont des corps de rupture de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$.

Corollaire 1.6.1 *Si $P \in K[X]$ est irréductible, il existe toujours un corps de rupture de P sur K, unique à isomorphisme près.*

Réalisation du corps de rupture

Si $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n \in K[X]$ est irréductible, alors $K[X]/(P) \simeq K[A]$ où A est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Par exemple : $\mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $\mathbb{F}_{25} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_5 \right\}$

1.5 Corps de décomposition

Soit $0 \neq P \in K[X]$. On suppose que $E \geq K$ est un corps où P est scindé : $P = c(X - x_1)...(X - x_n)$, $c \in K^\times$. On dit que $K(x_1, ..., x_n)$ est le *corps de décomposition* de P dans E.

Proposition 1.7 *Un cops de décomposition existe toujours.*

Démonstration : Par récurrence sur $\deg P$ en utilisant l'existence de corps de rupture. **Q.e.d.**

Nous allons voir qu'il y a unicité à isomorphisme près.

Théorème 1.8 (prolongement d'isomorphisme) *Soit $\sigma : K \to K'$ un isomorphisme de corps. Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible. Alors $P^\sigma \in K'[X]$ est irréductible. Si α, α' sont des racines de P et P^σ dans des extensions de K, K', alors σ se prolonge en un isomorphisme $K(\alpha) \simeq K'(\alpha')$ qui envoie α sur α'.*

Théorème 1.9 (unicité du corps de décomposition) *Soit $\sigma : K \to K'$ un isomorphisme de corps. Soit $P \in K[X]$. Soit $E \geq K$ un corps où P est scindé :$P = c(X - x_1)...(X - x_n)$. Soit $E' \geq K'$ un corps où P^σ est scindé : $P^\sigma = c'(X - x'_1)....(X - x'_n)$. Soient $B := K(x_1, ..., x_n), B' := K'(x'_1, ..., x'_n)$. Alors σ se prolonge en un isomorphisme $B \simeq B'$.*

Corollaire 1.9.1 *Soient L, L' deux corps de décomposition de P sur K. Alors il existe un $K-$isomorphisme $L \simeq L'$.*

Exemples : soient q une puissance d'un nombre premier p ; le corps $\mathbb{F}_q$ est un corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$ et on a donc l'unicité à isomorphisme près des corps finis de cardinaux donnés.

Définition 2 *On dit qu'un corps K est algébriquement clos si tout polynôme non constant est scindé sur K.*

Théorème 1.10 *Soit K un corps. Il existe une extension algébrique $\overline{K}$ de K qui est un corps algébriquement clos. C'est une clôture algébrique de K. L'extension $\overline{K}$ est unique à $K-$isomorphisme près.*

Démonstration :
Existence : soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $K[X]$. Pour tout $p \in \mathscr{P}$, on choisit une variable X_p. Soit $A := K[X_p : p \in \mathscr{P}]$. Soit I l'idéal de A engendré par les polynômes $p(X_p)$, $p \in \mathscr{P}$. Alors I est propre donc contenu dans un idéal maximal M. Le corps A/M est une extension algébrique de K et tout polynôme p irréductible sur K a une racine $(X_p \bmod M)$ dans A/M. Cela suffit pour dire que A/M est algébriquement clos (comme nous le verrons plus tard) ...
Unicité : on utilise le lemme de Zorn ... **Q.e.d.**

Exemples : $\mathbb{C}$ (*resp.*$\overline{\mathbb{Q}}$ (*resp.*$\cup_{n\geq 1}\mathbb{C}((t^{1/n}))$)) est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$ (*resp.*de $\mathbb{Q}$ (*resp.*de $\mathbb{C}((t))$)).

2 Théorème d'indépendance des caractères d'Artin

Si G est un groupe et K un corps, un caractère de G dans K est un morphisme de groupes $G \to K^\times$. L'ensemble des caractères est une partie du $K-$espace vectoriel des fonctions $G \to K$.

Exemple : $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $K = \mathbb{C}$, les caractères de G dans $\mathbb{C}$ sont les $k \mapsto \zeta^k$ où $\zeta = \exp(2i\pi/n)$.

2.1 Indépendance

Théorème 2.1 (Artin) *Soient $\sigma_1, ..., \sigma_n$ n caractères distincts de G dans K. Alors les σ_i sont $K-$linéairement indépendants.*

Corollaire 2.1.1 *Soient E, E' deux corps. Si $\sigma_1, ..., \sigma_n$ sont n morphismes distincts de corps $E \to E'$. Alors les σ_i sont $E'-$linéairement indépendants.*

Exercice : si G abélien, on pose $G^\vee$ le groupe des caractères de G dans $\mathbb{C}$. Montrer que $G^\vee \simeq G$ *(non canonique).*

Exercice : si G fini, $|\mathrm{Hom}(G, K^\times)| \leq |G|$.

2.2 Corps des invariants

Théorème 2.2 *Soient $\sigma_1, ..., \sigma_m$ m morphismes distincts $E \to E'$. Alors si $F := E^{\{\sigma_1,...,\sigma_m\}} := \{x \in E \ : \ \sigma_1(x) = ... = \sigma_n(x)\}$, $[E : F] \geq m$.*

Démonstration : Si $e_1, ..., e_n$ est une famille génératrice de E comme $F-$espace vectoriel, alors les lignes de la matrice $(\sigma_i(e_j))_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_{m,n}(E')$ sont indépendantes. Donc $m \leq n$. **Q.e.d.**

Corollaire 2.2.1 *Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(E)$, alors $[E : E^G] \geq |G|$.*

Remarque : comme G contient l'identité, $E^G = \{x \in E \ : \ \forall g \in G, \ g(x) = x\}$.

Exemple : $E = \mathbb{C}$, $G = \{1, \sigma\}$ où σ est la conjugaison complexe, $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

3 Correspondance de Galois

3.1 Extensions galoisiennes

Définition 3 *Soit E un corps. Soit $G \leq \mathrm{Aut}(E)$ fini. On dit que E/E^G est une extension galoisienne de groupe de Galois G.*

Exemples : $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$, $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(X^3)$; *contre-exemple :* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(X)/\mathbb{F}_p(X^p)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$.

Exemple : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)/\mathbb{Q}$.

Théorème 3.1 *Soit E un corps. Soit $G \leq \mathrm{Aut}(E)$ un groupe fini. Alors $[E : E^G] = |G|$.*

Démonstration : On utilise la forme $F-$linéaire $\mathrm{Tr} : E \to F$, $x \mapsto \sigma_1(x) + ... + \sigma_n(x)$ où $F = E^G$, $G = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$. Soient $g_1, ..., g_n$ les éléments de G. Si $e_1, ..., e_{n+1}$ sont des éléments de E, alors les colonnes de la matrices $(g_i(e_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n+1}} \in \mathscr{M}_{n,n+1}$ sont liées. Donc $\forall\, i$, $\sum_j x_j g_i(e_j) = 0$ pour certains $x_j \in E$. D'où :

$$\forall\, i, \ \sum_j g_i^{-1}(x_j) e_j = 0$$

et $\sum_i \sum_j g_i^{-1}(x_j)e_j = 0 \Rightarrow \sum_j \mathrm{Tr}(x_j)e_j = 0$. C'est encore vrai si on remplace x_j par xx_j, $x \in E$. Donc on peut choisir les x_j tels que $x_1 \in E$ et $\mathrm{Tr}(x_1) \neq 0$ par exemple. Mais alors, les e_j sont liés sur E^G. **Q.e.d.**

Cours du mardi 3 février 2015

Exemples :

a) $k(x_1, ..., x_n)^{\mathfrak{S}_n} = k(s_1, ..., s_n)$ (où k est un corps et où les s_i sont les polynômes symétriques élémentaires) car $k(x_1, ..., x_n) \geq k(x_1, ..., x_n)^{\mathfrak{S}_n} \geq k(s_1, ..., s_n)$ et $[k(x_1, ..., x_n) : k(x_1, ..., x_n)^{\mathfrak{S}_n}] = |\mathfrak{S}_n| = n! \geq [k(x_1, ..., x_n) : k(s_1, ..., s_n)]$,

b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois $G := \langle s, t\rangle \simeq \mathfrak{S}_3$ où s est le $\mathbb{Q}(j)-$automorphisme qui envoie $\sqrt[3]{2}$ sur $j\sqrt[3]{2}$ et t le $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})-$automorphisme qui envoie j sur j^2 ;

c) soit G le sous-groupe des automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ engendré par les changements de variables $t \mapsto t^{-1}$ et $t \mapsto 1 - t$. On vérifie que G est d'ordre 6, isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Soit K le sous-corps des fractions rationnelles $f \in \mathbb{C}(t)$ invariantes par les changements de variables

$$t \mapsto 1 - t \text{ et } t \mapsto t^{-1} \ .$$

Montrer que $K = \mathbb{C}\left(\frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}\right)$.

En déduire que l'extension :

$$\mathbb{C}\left(\frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2}\right) \subset \mathbb{C}(t)$$

est galoisienne de groupe de Galois S_3.

Exercice : on pose $y_1 := x_1 + jx_2 + j^2x_3$, $y_2 := x_1 + j^2x_2 + jx_3$. Montrer que $\mathbb{C}(x_1, x_2, x_3)^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{C}(y_1^2/y_2, y_2^2/y_1, \sigma_1)$.

On peut retrouver les polynômes symétriques à partir des fractions rationnelles symétriques ...

Exercice On pose $L := k(s_1, ..., s_n)$ et $L_i := L(x_{i+1}, ..., x_n)$, $0 \leq i \leq n$ $(L_n = L)$.

a) $[L_{i-1} : L_i] = i$ et $1, ..., x_i^{i-1}$ est une base de L_{i-1}/L_i.

b) $\{x_1^{a_1}...x_n^{a_n} \ : \ \forall\, i,\ a_i \leq i - 1\}$ est une base de $k(x_1, ..., x_n)/L$.

c) tout $g \in k[x_1, ..., x_n]$ est une combinaison $k[s_1, ..., s_n]-$linéaire de monômes $x_1^{a_1}...x_n^{a_n} \ : \ \forall\, i,\ a_i \leq i - 1$.

d) On retrouve que $k[x_1, ..., x_n]^{\mathfrak{S}_n} = k[s_1, ..., s_n]$.

Corollaire 3.1.1 (Maximalité du groupe de Galois) *Soit E/F galoisienne de groupe G. Alors si $E' \geq E$ et si $\sigma : E \to E'$ est un $F-$morphisme de corps, $\sigma \in G$. En particulier, $G = \mathrm{Aut}_F(E)$, groupe des automorphismes $F-$linéaires de E.*

Notation : si $F = E^G$, $G =: \mathrm{Gal}(E/F)$.

3.2 Injectivité

Corollaire 3.1.2 (Injectivité) *Si E/F est galoisienne de groupe G si $H_1, H_2 \leq G$, alors $E^{H_1} = E^{H_2} \Leftrightarrow H_1 = H_2$.*

3.3 Surjectivité

Théorème 3.2 *Soit E/F une extension galoisienne de groupe de Galois G. Si $F \leq B \leq E$, alors il existe $H \leq G$ tel que $E^H = B$.*

Démonstration : Soit $H := \mathrm{Aut}_B(E)$. On a : $B \leq E^H$. Soit $s_1, ..., s_r$ un système de représentants de G/H. On a $B^{\{s_1,...,s_r\}} = F$ donc $[B : F] \geq r$ et $[E : B] \leq [E : F]/r = |H| = [E : E^H]$ d'où $B = E^H$. **Q.e.d.**

Exercice : donner la liste des sous-corps de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$.
(*réponse :* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j) \geq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(j\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(j^2\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(j) \geq \mathbb{Q}$).

3.4 Théorème fondamental

Théorème 3.3 *Soit E/F une extension galoisienne de groupe G.*

i) On a 2 bijections réciproques :

$$\{H \leq G\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{F \leq B \leq E\}$$

$$H \mapsto E^H$$

$$\mathrm{Gal}(E/B) \leftarrow B \ .$$

ii) L'extension E/B est galoisienne et $[E : B] = |\mathrm{Gal}(E/B)|$;

iii) $[B : F] = |G/\mathrm{Gal}(E/B)|$;

iv) l'extension B/F est galoisienne si et seulement si $\mathrm{Gal}(E/B) \triangleleft G$. Dans ce cas, $\mathrm{Gal}(B/F) \simeq G/\mathrm{Gal}(E/B)$.

Démonstration : Si $\mathrm{Gal}(E/B) \triangleleft G$, si $\sigma \in G$, alors $\sigma(B) = B$: en effet, $\mathrm{Gal}(E/\sigma(B)) = \sigma\mathrm{Gal}(E/B)\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(E/B) \Rightarrow \sigma(B) = B$. Notons G' l'image du morphisme $\sigma \mapsto \sigma|_B$. On a : $B^{G'} = F$. Réciproquement si B/F est galoisienne, alors pour tout $\sigma \in G$, $\sigma|_B \in \mathrm{Gal}(B/F)$ (*cf.* le corollaire 3.1.1). On a alors $\mathrm{Gal}(E/B) = \ker(G \to \mathrm{Gal}(B/F)\,, \sigma \mapsto \sigma|_B)$ qui est un noyau donc distingué. **Q.e.d.**

Proposition 3.4 *Soit E/K une extension galoisienne. On suppose que $K \leq B \leq B' \leq E$. On note $U := \mathrm{Gal}(E/B)$, $U' := \mathrm{Gal}E/B'$. Alors B'/B est galoisienne $\Leftrightarrow U' \triangleleft U$. Et dans ce cas, $\mathrm{Gal}(B'/B) \simeq U/U'$.*

Exercice : démontrer cette proposition.

3.5 Caractérisation des extensions galoisiennes

Théorème 3.5 *Soit E/K une extension finie. On a toujours : $|\mathrm{Aut}_K(E)| \leq [E : K]$. L'extension E/K est galoisienne $\Leftrightarrow |\mathrm{Aut}_K(E)| = [E : K]$. Dans ce cas, $\mathrm{Gal}(E/K) = \mathrm{Aut}(E/K)$.*

Contre-exemples :

a) si $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, alors $|\mathrm{Aut}(E/\mathbb{Q})| = 2 < 4 = [E : \mathbb{Q}]$.

b) si p est premier et $E = \mathbb{F}_p(T)$ et $K = \mathbb{F}_p(T^p)$; alors $[\mathbb{F}_p(T) : \mathbb{F}_p(T^p)] = p$ mais $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p(T^p)}(\mathbb{F}_p(T)) = \{\mathrm{Id}\}$.

3.6 Séparabilité

Soit $P \in K[X]$. Alors : P est premier avec P' si et seulement s'il n'existe pas d'extension où P a une racine multiple (*i.e.* d'ordre > 1). Dans ce cas, on dit que P est un *polynôme séparable*

Définition 4 (séparable) *Si E/K est une extension. On dit que $\alpha \in E$ est algébrique séparable si $P(\alpha) = 0$ pour un polynôme séparable $P \in K[X]$ $\Leftrightarrow$ le polynôme minimal de α est séparable.*

Une extension est *séparable* si tous ses éléments le sont.

Proposition 3.6 *Si $P \in K[X]$ est irréductible, alors P est séparable si $P' \neq 0$. En particulier, en caractéristique nulle ou sur un corps fini, tout polynôme irréductible est séparable.*

Contre-exemple : $X^p - t$ est irréductible non séparable sur $\mathbb{F}_p(t)$.

Théorème 3.7 *Soit E/F une extension galoisienne de groupe G. Soit $x \in E$. Soient $x_1, ..., x_r$, $r \leq n$ les images distinctes de x par les $\sigma \in G$. Le polynôme $(X - x_1)....(X - x_r)$ est le polynôme minimal de x sur F. En particulier, E/F est séparable.*

Théorème 3.8 *Une extension finie E/K est galoisienne $\Leftrightarrow E$ est le corps de décomposition sur K d'un polynôme $P \in K[X]$ séparable. Dans ce cas, on dit que $\mathrm{Gal}(E/K)$ est le groupe de Galois de P sur K, noté $\mathrm{Gal}_K(P)$. De plus $\mathrm{Gal}_K(P)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_r$ où $r = \deg P$.*

Démonstration : $\Rightarrow$: Soit $e_1, ..., e_n$ une base de E/K. Soient $P_1, ..., P_n \in K[X]$ les polynômes minimaux correspondants. Alors les P_i sont scindés sur E et leurs racines engendrent E car les e_i sont parmi elles. Donc E est le corps du décomposition du polynôme séparable $\prod' P_i \in K[X]$ où on ne choisit qu'une seule fois chaque facteur irréductible.

$\Leftarrow$: Soit P un polynôme séparable. Soit E un corps de décomposition de P sur K. On raisonne par récurrence sur le nombre de racines qui ne sont pas dans K. Soit x_1 une racine qui n'est pas dans K. Alors par hypothèse de récurrence, $E/K(x_1)$ est galoisienne de groupe $H \leq \mathrm{Aut}_K(E)$. On sait que $G := \mathrm{Aut}_K \in E$ est fini. Soit $x \in E^G$. On a $x \in K(x_1)$. On a $x = a_0 + ... + a_{d-1}x_1^{d-1}$ pour certains $a_i \in K$ où $d := [K(x_1) : K]$. Notons $x_2, ..., x_d$ les autres racines du polynôme minimal de x_1 sur K. Les isomorphismes : $K(x_1) \simeq K(x_i)$, $x_1 \mapsto x_i$ se prolongent en des éléments $s_i \in G$. Comme $s_i(x) = x$, on a :

$$\forall\, i,\ a_0 - x + a_1 x_i + ... + a_{d-1}x_i^{d-1} = 0$$

Donc le polynôme $a_0 - x + ... + a_{d-1}X^{d-1}$ a au moins d racines donc est nul donc $a_0 = x \in K$. **Q.e.d.**

Cours du mardi 24 février 2015

Exercice : vérifier que $\mathrm{Gal}_K(P)$ agit transitivement sur les racines si et seulement si P est irréductible sur K.

Corollaire 3.8.1 *Soit a un élément algébrique séparable sur K. Alors l'extension $K(a)/K$ est séparable.*

Démonstration : Soit P le polynôme minimal de a sur K. Soit L/K un corps de décomposition de P sur K contenant a. Alors L/K est galoisienne donc séparable. Comme $K(a) \leq L$, $K(a)/K$ est aussi séparable. **Q.e.d.**

Exemple : on retrouve ainsi que toute extension finie d'un corps fini est séparable.

3.7 Normalité

Théorème 3.9 *Soit E/K une extension algébrique. Si $\sigma : E \to E$ est un $K-$endomorphisme de corps, alors σ est un automorphisme.*

Démonstration : Il suffit de démontrer la surjectivité. Soit $x \in E$. Soit $P \in K[X]$ le polynôme minimal de x sur K. On peut prolonger σ à $E[X]$. Alors $P^\sigma = P$. Soit $P = \prod_i P_i$ la factorisation de P en produits d'irréductibles unitaires dans $E[X]$. On a $P^\sigma = \prod_i P_i^\sigma$. Par unicité de la factorisation en irréductible, $P^\sigma = P \Rightarrow \exists\, i, P_i^\sigma = X - x$. Soit $x' \in E$ tel que $X - x' = P_i$.

On a $\sigma(x') = x$. **Q.e.d.**

Exercice : donner un contre-exemple si E/F n'est pas algébrique.

Théorème 3.10 (de prolongement) *Soit E/K une extension algébrique. On suppose que $E = K(x_i \ : \ i \in I)$ pour une certaines familles $x_i, i \in I$ d'éléments de E. Pour tout i, soit P_i le polynôme minimal de x_i sur K. On suppose qu'il existe un morphisme de corps $\sigma : K \to \Omega$ où Ω est un corps où tous les polynômes P_i^σ sont scindés (par exemple c'est le cas si Ω est algébriquement clos). Alors σ se prolonge à E.*

Démonstration : *dans le cas où I est fini.* Il suffit de raisonner par récurrence. Il suffit donc de traiter le cas où I est un singleton. C'est facile ... **Q.e.d.**

Définition 5 *On dit qu'une extension algébrique E/F est normale si tout polynôme irréductible $P \in F[X]$ qui a une racine dans E est scindé sur E.*

Exemples : les extensions de degré 2 sont toujours normales.
Contre-exemples : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ ne sont pas normales.

Proposition 3.11 *Soit E/F une extension algébrique. Sont équivalentes :*

(i) l'extension E/F est normale ;

(ii) pour toute extension Ω de F, et pour tous $F-$morphismes $\sigma, \tau : E \to \Omega$, $\sigma(E) = \tau(E)$. ;

(iii) pour toute extension Ω de E, et pour tout $F-$morphisme $\sigma : E \to \Omega$, $\sigma(E) = E$. ;

Démonstration : $(i) \Rightarrow (ii)$: soit $x \in E$. Soit P le polynôme minimal unitaire de x sur F. On peut prolonger σ, τ à $E[X]$. Comme $P \in F[X]$, $P^\sigma = P^\tau$. Or $X - x$ est un facteur irréductible de P dans $E[X]$. Donc $X - \sigma(x) | P^\tau \Rightarrow \exists y \in E$, $\sigma(x) = \tau(y)$. Donc $\sigma(x) \in \tau(E)$. D'où $\sigma(E) \leq \tau(E)$. De même, $\tau(E) \leq \sigma(E)$.

$ii \Rightarrow iii$: facile ;

$iii \Rightarrow i$: soit $P \in F[X]$ un polynôme irréductible sur F avec une racine $x \in E$. Soit Ω un corps algébriquement clos qui contient E. Soit $x' \in \Omega$ une autre racine de P. Alors le $F-$morphisme $F(x) \to \Omega$, $x \mapsto x'$ se prolonge en un morphisme $\sigma : E \to \Omega$. On a donc $\sigma(E) = E$ et $x' \in E$. Donc toutes les racines de P sont dans E.

Q.e.d.

Proposition 3.12 *Si E/F est un corps de décomposition, E/F est normale.*

Démonstration : Supposons que $P \in F[X]$ est irréductible avec une racine x dans E. Soit $\Omega \geq E$ un corps algébriquement clos (si E/F est engendré par un nombre fini d'éléments $x_1, ..., x_n$, il suffit de prendre une extension où tous les polynômes minimaux des x_i et le polynôme P sont scindés). Soit x' une racine de P. Le $F-$morphisme $F(x) \to \Omega$, $x \mapsto x'$ se prolonge en un morphisme $E \to \Omega$ d'image E ! Donc $x' \in E$ et toutes les racines de P sont dans E.

Q.e.d.

Exemple : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)/\mathbb{Q}$, *contre-exemple :* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

Théorème 3.13 *Soit E/F une extension finie. Alors l'extension E/F est galoisienne si et seulement si elle est normale et séparable.*

Démonstration : $\Rightarrow$: déjà fait.

$\Leftarrow$: Soit E/F une extension finie normale est séparable. Soit $e_1, ..., e_n$ une base de E/F. Soit P le produit des polynômes minimaux distincts des e_i sur F. Alors E est un corps de décomposition de P qui est un polynôme séparable. Donc E/F est galoisienne. **Q.e.d.**

Remarques :

i) Si M/L et L/K sont normales, M/K ne l'est pas forcément. Par exemple : $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $M = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

ii) Si M/L et L/K sont séparables, alors M/K est aussi séparable (nous le démontrerons plus tard).

3.8 Composée de corps

section non faite en cours

Soit L/K une extension. Soient $K \leq E, E' \leq L$. On note EE' le sous-corps de L engendré par E et E'.

Proposition 3.14 *Soient L/K une extension galoisienne de groupe G, $K \leq E, E' \leq L$, $H := \mathrm{Gal}(L/E)$, $H' := \mathrm{Gal}(L/E')$. On a :*

i) $\mathrm{Gal}(L/EE') = H \cap H'$, $\mathrm{Gal}(L/E \cap E') = \langle H, H' \rangle$.

ii) Si E'/K est galoisienne, alors EE'/E aussi et $\mathrm{Gal}(EE'/E) \simeq \mathrm{Gal}(E'/E \cap E')$, $s \mapsto s|_{E'}$.

iii) Si E/K et E'/K sont galoisiennes, alors EE'/K aussi et $\mathrm{Gal}(EE'/K)$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $\mathrm{Gal}(E/K) \times \mathrm{Gal}(E'/K)$ *via* $s \mapsto (s|_E, s|_{E'})$. *Si de plus,* $E \cap E' = K$, $\mathrm{Gal}(EE'/K) \simeq \mathrm{Gal}(E/K) \times \mathrm{Gal}(E'/K)$.

Exercice : Soient $L := k(X_1, X_2, X_3, X_4)$, $K := L^{\mathfrak{S}_4} = k(s_1, s_2, s_3, s_4)$, $E := k(x_4) = L^{\mathfrak{S}_3}$, $E' := L^{K_4}$ où $K_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

On a $H = \mathfrak{S}_3$, $H' = K_4$, $[E : K] = |\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_3| = 4$, $[E' : K] = |\mathfrak{S}_4/K_4| = 6$, $EE' = L = L^{H\cap H'}$, $E \cap E' = L^{\langle H,H'\rangle} = K$. Comme H n'est pas distingué dans $\mathfrak{S}_4$, E/K n'est pas galoisienne. En revanche E'/K est galoisienne de groupe de Galois $\simeq \mathfrak{S}_4/K_4 \simeq \mathfrak{S}_3$. Vérifier que $E' = K(\beta)$ où $\beta = \sum_{\sigma\in K_4} \sigma\alpha$ où $\alpha := x_1x_2^2x_3^3x_4^4$.

4 Corps finis

Exemples : $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]/(7)$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(3)$, $\left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\}$, $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$.

4.1 Sous-groupes finis de $K^\times$

Soit G un groupe fini. On note $\omega(G)$ l'*exposant de* G : c'est le ppcm des ordres des éléments de G.

Exemple : $\omega(\mathfrak{S}_3) = 6$

Lemme 4.1 *Soient $a, b \in G$ tels que $ab = ba$. Si a, b sont d'ordres finis m, n premiers antre eux, alors ab est d'ordre mn.*

Corollaire 4.1.1 *Dans un groupe abélien fini, l'ensemble des ordres des éléments est stable par ppcm.*

Démonstration : Soit x d'ordre $m = p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$ et soit y d'ordre $n = p_1^{b_1}...p_r^{b_r}$ où les p_i sont des nombres premiers deux à deux non associés et où les $a_i, b_i \in \mathbb{N}$. Alors pour tout i, $x^{\prod_{j\neq i} p_j^{a_j}}$ est d'ordre $p_i^{a_i}$ et $y^{\prod_{j\neq i} p_j^{b_j}}$ est d'ordre $p_i^{b_i}$. Donc il existe z_i d'ordre $p_i^{c_i}$ pour tout i, où $c_i := \max\{a_i, b_i\}$. On a $z_1....z_r$ d'ordre $\prod_i p_i^{c_i} = \text{ppcm}(m, n)$. **Q.e.d.**

Proposition 4.2 *Soit G un sous-groupe fini de $K^\times$, alors G est cyclique.*

Démonstration : Soit N le ppcm des ordres des éléments de G. Alors il existe un élément $g \in G$ d'ordre N. Or $X^N = 1$ a au plus N solutions dans K. Comme $\langle g\rangle \leq G \leq \{x \in K^\times : x^N = 1\}$, on a $\langle g\rangle = G = \{x \in K^\times : x^N = 1\}$ et G cyclique. **Q.e.d.**

Exemple : les $\mathbb{F}_q^\times$ sont cycliques ; les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^\times$ sont cycliques : ce sont les $\mu_{\mathbf{n}}$.

Contre-exemple : $\mathbb{Q}_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \leq \mathbb{H}^\times$ n'est pas cyclique.

Exercice : déterminer les sous-groupes *d'indice fini* de $\mathbb{C}^\times$, de $\mathbb{R}^\times$.

4.2 Structure

Un anneau A est de caractéristique n si $n\mathbb{Z} = \ker(\mathbb{Z} \to A,\ n \mapsto n1_A)$. Si A est intègre, la caractéristique est un nombre premier.

Proposition 4.3 *Si A est un anneau de caractéristique p, un nombre premier, alors $\mathrm{Fr}_q : A \to A,\ x \mapsto x^q$ est un morphisme d'anneaux si q est une puissance de p.*

Soit K un corps fini. Sa caractéristique est un nombre premier p et son cardinal q une puissance de p. De plus si $q = p^n$, alors $(K, +) \simeq (\mathbb{Z}/p)^n$ et $(K^\times, \times) \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

Théorème 4.4 *Soit p un nombre premier. Si $n \geq 1$, il existe, à isomorphisme près, un unique corps de cardinal $q = p^n$ c'est le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$.*

Théorème 4.5 *Soit q une puissance d'un nombre premier p. Si $\mathbb{F}_q \leq K \leq \mathbb{F}_{q^n}$, alors K est de cardinal q^m où $m|n$. Réciproquement, si $m|n$, il existe un unique sous-corps K de $\mathbb{F}_{q^n}$ de cardinal q^m : c'est l'ensemble des racines de $X^{q^m} - X$ dans $\mathbb{F}_q$.*

Théorème 4.6 *Soit K un corps fini. Pour tout n, il existe une extension L/K de degré n. Cette extension est galoisienne, cyclique et unique à isomorphisme près.*

Démonstration : $K \simeq \mathbb{F}_q$ et $L \simeq \mathbb{F}_{q^n}$. **Q.e.d.**

Remarque : si k est un corps, alors il existe une extension algébrique $\overline{k}$ de k telle que $\overline{k}$ est algébriquement clos. Ce corps $\overline{k}$ est unique à $k-$isomorphisme près. On dit que c'est une clôture algébrique de k. Pour $\mathbb{F}_p$, on a : $\mathbb{F}_{p^n} = \{x \in \overline{\mathbb{F}_p} \ :\ x^{p^n} = x\}$ et $\overline{\mathbb{F}_p} = \cup_n \mathbb{F}_{p^n}$.

Dans la suite, on fixe pour tout p une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$: notée $\overline{\mathbb{F}_p}$ et $\mathbb{F}_{p^n} := \{x \in \overline{\mathbb{F}_p} \ :\ x^{p^n} = x\}$.

4.3 Polynômes sur les corps finis

4.3.1 Nombre de polynômes irréductibles de degré donné

Théorème 4.7 (de l'élément primitif) *Soient p un nombre premier et q une puissance de p. Pour tout $n \geq 1$, il existe $\theta \in \mathbb{F}_{q^n}$ tel que $\mathbb{F}_{q^n} = \mathbb{F}_q[\theta]$ et il existe un polynôme irréductible de degré n sur $\mathbb{F}_q$.*

Démonstration : En effet, il suffit de choisir pour θ un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_{q^n}^\times$. **Q.e.d.**

Lemme 4.8 *Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ irréductible de degré m. Alors P divise $X^{q^n} - X$ sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si $m|n$.*

Démonstration : Si $m|n$, alors $q^m - 1 | q^n - 1$ donc $X^{q^m-1} - 1 | X^{q^n-1} - 1$ et $X^{q^m} - X | X^{q^n} - X$. Réciproquement, si $P | X^{q^n} - X$ alors si $x \in \mathbb{F}_{q^n}$ est une racine de P, on a :

$$\mathbb{F}_q \leq \mathbb{F}_q[x] \leq \mathbb{F}_{q^n}$$

donc $m = \deg P = [\mathbb{F}_q[x] : \mathbb{F}_q]$ divise $n = [\mathbb{F}_{q^n} : \mathbb{F}_q]$. Réciproquement, $m|n \Rightarrow q^m - 1 | q^n - 1 \Rightarrow X^{q^m-1} - 1 | X^{q^n-1} - 1 \Rightarrow X^{q^m} - X | X^{q^n} - X$. Or, si on pose $K := \mathbb{F}_q[X]/(P)$ et $x := X \bmod P$, on a $\left| \mathbb{F}_q[X]/(P) \right| = q^m \Rightarrow x^{q^m} = x \Rightarrow x^{q^m} - x = 0 \Rightarrow P | X^{q^m} - X$. **Q.e.d.**

Cours du mardi 3 mars 2015

Corollaire 4.8.1 *On a :*

i)

$$X^{q^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P} P(X)$$

où P décrit les polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{F}_q$ de degré d.

ii) $q^n = \sum_{d|n} d\nu_d(q)$ *; où $\nu_n(q)$ est le nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ unitaires de degré n.*

iii) $\nu_n(q) = \frac{\sum_{d|n} \mu(n/d) q^d}{n}$ *où μ est la fonction de Möbius.*

Rappel : si $\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ pour $s > 1$, alors $\zeta(s)^{-1} = \sum_{n \geq 1} \mu(n) n^{-s}$ (on peut prendre cette formule comme définition de μ). Plus concrètement, on a :

$$\mu(p_1^{a_1} ... p_r^{a_r}) = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } a_i \geq 2, \\ (-1)^r & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple : dans $\mathbb{F}_3$, on a :

$$X^9 - X = X(X+1)(X+2)(X^2+X+2)(X^2+2X+2)(X^2+1)$$

et $\nu_2(3) = \frac{3^2-3}{2} = 3$.

Exercice :

Donner un sens au produit infini $\prod_P (1 - t^{\deg P})^{-1}$ où P décrit l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{F}_q$ et montrer que :

$$\prod_P (1 - t^{\deg P})^{-1} = (1 - qT)^{-1} \ .$$

L'égalité précédente s'écrit :

$$\prod_{n\geq 1}(1-t^n)^{-\nu_n(q)} = (1-qT)^{-1} \ .$$

Exercice : Vérifier : $\nu_n(q) = \frac{q^n}{n} + O\left(\frac{q^{n/2}}{n}\right)$. En déduire

$$\left| \{P \in \mathbb{F}_q[X] \ : \ P \text{ irréductible unitaire } \deg P \leq n\} \right| \sim \frac{q}{q-1}\frac{q^n}{n} \ .$$

4.3.2 Ordre d'un polynôme, polynôme primitif

Théorème 4.9 *Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ irréductible de degré m. Alors P est scindé à racines simples sur $\mathbb{F}_{q^m}$. Si a est l'une d'elles, les autres sont $a, ..., a^{q^{m-1}}$. En particulier, si $P \neq X$, toutes les racines de P ont le même ordre multiplicatif dans $\mathbb{F}_{q^m}^\times$.*

Démonstration : Soit a une racine de P. Le corps $\mathbb{F}_q[a]$ est une extension galoisienne de $\mathbb{F}_q$ de groupe engendré par $x \mapsto x^q$. Le groupe de Galois agit transitivement sur les racines de P. **Q.e.d.**

Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ un polynôme irréductible premier à X. L'*ordre de P* est le plus petit entier $e > 0$ tel que $P | X^e - 1$.

Remarque : on a aussi que e est l'ordre de X dans $(\mathbb{F}_q[X]/(P))^\times$ c'est aussi l'ordre commun des racines de P dans $\overline{\mathbb{F}_p}^\times$.

Proposition 4.10 *Si P est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ de degré m, l'ordre e de P divise $q^m - 1$. De plus, si $e > 1$, m est l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$.*

Démonstration : Soit a une racine de P dans une extension de $\mathbb{F}_q$. Alors $\mathbb{F}_q[a] = \mathbb{F}_{q^m}$. Donc l'ordre de a, qui est e, divise $q^m - 1$. Si $q^n = 1 \bmod e$, alors $a^{q^n-1} = 1$ donc $a^{q^n} = a$. Donc $a \in \mathbb{F}_{q^n}$. D'où, $\mathbb{F}_q[a] \leq \mathbb{F}_{q^n}$. Par conséquent, $m = [\mathbb{F}_q[a] : \mathbb{F}_q] | n = [\mathbb{F}_{q^n} : \mathbb{F}_q]$. Donc m est bien le plus petit entier tel que $q^m = 1 \bmod e$. **Q.e.d.**

Théorème 4.11 *Soient $e, m > 1$. Le nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ et unitaires de degré m, d'ordre e est :*

$$N_{q,m,e} = \varphi(e)/m \text{ si } m \text{ est l'ordre de } q \text{ dans } (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times, 0 \text{ sinon.}$$

Démonstration : Soit $\Phi_e := \prod_{\substack{x \in \mathbb{F}_{q^m} \\ x \text{ d'ordre } e}} X - x \in \mathbb{F}_q[X]$. En effet, on le démontre par récurrence en utilisant la formule :

$$\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$$

si $n|q^m-1$. Si P irréductible divise Φ_e, alors P est d'ordre e donc $\deg P = m$ l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$. Donc $mN_{q,m,e} = \varphi(e) =$ le nombre d'éléments d'ordre e dans le groupe cyclique $\mathbb{F}_{q^m}^\times$. **Q.e.d.**

Exemple : $2^{11}-1 = 23.89$. On a :

$$X^{23}-1 = (X+1)(1+X^2+X^4+X^5+X^6++X^{10}+X^{11})(1+X+X^5+X^6+X^7+X^9+X^{11})$$

dans $\mathbb{F}_2[X]$. Il existe $a \in \mathbb{F}_{2^{11}}^\times$ d'ordre 23 tel que :

$$1+X^2+X^4+X^5+X^6+X^{10}+X^{11} = \prod_{i\in\{1,2,3,4,6,8,9,12,13,16,18\}} (X-a^i)\ ;$$

$$1+X+X^5+X^6+X^7+X^9+X^{11} = \prod_{i\in\{5,7,10,11,14,15,17,19,20,21,22\}} (X-a^i)\ .$$

Pour $e=23$, $q=2$, 2 est d'ordre 11 $\mod 23$; les polynômes d'ordre 23 sur $\mathbb{F}_2$ sont de degrés 11, il y en a $\varphi(23)/11 = 2$.

Exemple : si $q=2, m=4$, alors $N_{2,4,e}=1$ si $e=5$, 2 si $e=15$.

On a : $\Phi_5 = 1+X+X^2+X^3+X^4$ *irréductible* et $\Phi_{15} = (1+X+X^4)(1+X^3+X^4)$.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{F}_q[X]$ de degré m est *primitif* s'il est le polynôme minimal d'un générateur de $\mathbb{F}_{q^m}^\times$.

Théorème 4.12 *Un polynôme unitaire irréductible de degré m est primitif si et seulement s'il est premier à X et d'ordre q^m-1.*

Exemple : les polynômes primitifs unitaires de degré 4 sur $\mathbb{F}_2$ sont : $1+X+X^4$ et $1+X^3+X^4$.

4.4 Algorithme de Berlekamp

Théorème 4.13 *Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ un polynôme de degré d sur $\mathbb{F}_q$. On suppose que P est séparable. Alors P est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si l'endomorphisme* $\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}$ *du $\mathbb{F}_q-$espace vectoriel $\mathbb{F}_q[X]/(P)$ est de rang $d-1$.*

Remarque : le rang est toujours $\leq d-1$.

Démonstration : Si le rang est $< d-1$, il existe un polynôme $Q = a_1X+...+a_{d-1}X^{d-1}$ non nul dans le noyau. Alors, le pgcd de P et $Q-a$ est non constant pour un certain $a \in \mathbb{F}_q$ car $P|Q^q-Q = \prod_{a\in\mathbb{F}_q}(Q-a)$. Donc P est divisible par un polynôme non constant de degré $< d = \deg P$ donc est réductible.

Réciproquement, si P n'est pas irréductible, $P = P_1...P_r$ pour des polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux P_i et un $r > 1$. Mais alors :

$$\mathbb{F}_q[X]/(P) \simeq \oplus_i \mathbb{F}_q[X]/(P_i)$$

Les sous-espaces $E_i := \mathbb{F}_q[X]/(P_i)$ sont stables par $\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}$ donc le rang est :

$$\sum_i \mathrm{rang}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}|_{E_i}) = \sum_i \deg P_i - 1 = d - r < d - 1 \ .$$

Q.e.d.

Exemple : $q = 2$, $P = X^5 + X^4 + 1$, Dans la base $1, X, X^2, X^3, X^4 \bmod P$, la matrice de $\mathrm{Fr}_2 - \mathrm{Id}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang est $3 < 5$. Donc P est réductible. Dans le noyau, on trouve : $Q := X^2 + X^3 + X^4$. Donc $P = \mathrm{pgcd}(P, Q)\mathrm{pgcd}(P, Q + 1) = (1 + X + X^2)(1 + X + X^3)$.

5 Clôture algébrique

Pas fait en cours Soit K un corps. Une *clôture algébrique de* K est une extension akgébrique de corps $\overline{K}/K$ telle que $\overline{K}$ est algébriquement clos.

Théorème 5.1 *Soit K un corps. Il existe une clôture algébrique de K. De plus si K_1, K_2 sont deux clôtures algébriques de K, alors il existe un $K-$isomorphisme $K_1 \simeq K_2$.*

Démonstration : *Existence :* Soit I l'ensemble des polynômes unitaires de $K[X]$ de degré ≥ 1. Pour tout $f \in I$, on introduit des variables $T_{f,i}$, $1 \leq i \leq \deg f$.

On pose $A := K[T_{f,i} \ : \ f \in I, 1 \leq i \leq \deg f]$ c'est un anneau de polynômes en une infinité de variables.

Soit J l'idéal de A engendré par les coefficients des polynômes :

$$f(X) - \prod_{i=1}^{\deg f} (X - T_{f,i})$$

lorsque f décrit I.

On a $J \subsetneq A$. En effet, sinon, il existe $f_1, ..., f_N \in I$ et certains coefficients $c_1, ..., c_N$ respectivement des polynômes :

$$f_j(X) - \prod_{i=1}^{\deg f_j} (X - T_{f_j,i})$$

$1 \leq j \leq N$ et des éléments $a_1, ..., a_N \in A$ tels que $a_1c_1 + ... + a_Nc_N = 1$.

Soit L une extension de K où $f_1, ..., f_N$ sont scindés :

$$f_j(X) = \prod_{i=1}^{\deg f_j} (X - r_{f_j,i})$$

pour certains $r_{f_j,i} \in L$.

Soit $\phi : A \to L$ le morphisme de $K-$algèbres tel que :

$$\phi(T_{f,i}) = \begin{cases} r_{f_j,i} & \text{si } f = f_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On étend ϕ en un morphisme $\phi : A[X] \to L[X]$.

On a : $\forall\, j$, $\phi(f_j(X) - \prod_i (X - T_{f_j,i})) = f_j(X) - \prod_{i=1}^{\deg f_j}(X - r_{f_j,i}) = 0 \in L[X]$. En particulier $\forall\, j$, $\phi(c_j) = 0$.

Donc $\phi(1) = \sum_j \phi(a_j)\phi(c_j) = 0$ *absurde !*

Soit $I \leq \mathfrak{m} < A$ un idéal maximal. On pose $\overline{K} := A/\mathfrak{m}$. C'est un corps. De plus $K \cap \mathfrak{m} = 0$ donc on peut identifier K avec son image dans $A/\mathfrak{m}$.

L'extension $\overline{K}/K$ est algébrique. En effet, $\overline{K}$ est engendré par les $t_{f,i} := T_{f,i} \bmod \mathfrak{m}$. Or par définition :

$$f(X) - \prod_{i=1}^{\deg f} (X - T_{f,i}) \in I[X] \leq \mathfrak{m}[X]$$

i.e. $f(X) = \prod_{i=1}^{\deg f}(X - t_{f,i}) \in \overline{K}[X]$. En particulier, $f(t_{f,i}) = 0$ et les $t_{f,i}$ sont algébriques sur K.

Le corps $\overline{K}$ est algébriquement clos. En effet, soit $P \in \overline{K}[X]$ un polynôme irréductible unitaire. Soit α une racine de P dans une extension Ω de $\overline{K}$. On a $K \leq \overline{K} \leq \overline{K}(\alpha)$. L'élément α est algébrique sur K. Soit Q son polynôme minimal sur K. Comme P est irréductible unitaire, P est le polynôme minimal de α sur $\overline{K}$. Donc $P|Q$ dans $\overline{K}[X]$. Or Q est scindé sur $\overline{K}$. Donc les facteurs irréductibles de P sont de degré 1 et $\deg P = 1$. **Q.e.d.**

Exemples : $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et $\cup_{n>0}\mathbb{C}((t^{1/n}))$ une clôture algébrique de $\mathbb{C}((t))$.

5.1 Retour sur la notion de séparabilité

Soit E/F une extension finie. On fixe un corps algébriquement clos Ω et un morphisme $\sigma : F \to \Omega$. On note $[E : F]_s$ le nombre de prolongement de σ à E, c'est le *degré séparable de* E/F. *Remarque :* ce nombre ne dépend pas du corps algébriquement clos choisi ni du morphisme σ. En effet, soit $\sigma' : F \to \Omega'$ est un autre morphisme vers un corps algébriquement clos. Soient $x_1, ..., x_n \in E$ tels que $E = F(x_1, ..., x_n)$. Soient $P_1, ..., P_n$ les polynômes minimaux des x_i sur F. Soit L (*resp.*L') le corps de décomposition des polynômes $P_i^\sigma \in \sigma(F)[X]$ dans Ω (*resp.*$P_i^{\sigma'} \in \sigma'(F)[X]$ dans Ω'). Il est clair que tout prolongement de σ à E envoie E dans L (*resp.*de σ' ... dans L'). Il existe un prolongement $\tau : L \simeq L'$ de $\sigma' \circ \sigma^{-1} : \sigma(F) \to \sigma'(F)$. On a alors une bijection :

$$\{\widetilde{\sigma} : E \to \Omega \ : \ \widetilde{\sigma}|_F = \sigma\} \xrightarrow{1:1} \{\widetilde{\sigma'} : E \to \Omega \ : \ \widetilde{\sigma'}|_F = \sigma'\}$$

$$\Sigma \longmapsto \tau \circ \Sigma$$

Proposition 5.2 *$[E : F]_s$ est fini $\leq [E : F]$.*

Démonstration : On a $E = F(x_1, ..., x_r)$ pour certains $x_i \in E$. Soit $\sigma : F \to \Omega$. Soit P_1 le polynôme minimal de x_1 sur F. Alors il y a une bijection entre les prolongements de σ à $F(x_1)$ et le nombre de racines distinctes du polynôme P_1^σ dans Ω. Donc $[F(x_1) : F]_s \leq [F(x_1) : F] = \deg P_1$. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des prolongements de σ à E. On a $\mathscr{P} = \cup_{\sigma_i} \mathscr{P}_{\sigma_i}$ où σ_i décrit les prolongements de σ à $F(x_1)$. On a donc $[E : F]_s = \sum_i [E : F(x_1)]_s \leq \sum_i [E : F(x_1)] = [F(x_1) : F]_s [E : F(x_1)] \leq [F(x_1) : F][E : F(x_1)] = [E : F]$. **Q.e.d.**

Proposition 5.3 *Si $E = k(a)$, alors $[E : k]_s = [E : k] \Leftrightarrow a$ séparable sur $k \Leftrightarrow E/k$ séparable.*

Démonstration : $[E : k]_s =$ le nombre de racines du polynôme minimal de a sur k. De plus, si a est séparable, E est contenu dans un corps de décomposition du polynôme minimal de a sur k qui est séparable et donc E est dans une extension galoisienne ... **Q.e.d.**

Cours du mardi 10 mars 2015

Proposition 5.4 *Si $K \leq L \leq M$, alors $[M : K]_s = [M : L]_s [L : K]_s$.*

Démonstration : Soit Ω un corps algébriquement clos et soit $\sigma : K \to \Omega$ un morphisme de corps. Notons $\mathscr{P}_{K,L,\sigma}$ l'ensemble des prolongements de σ à L.

On a : $\mathscr{P}_{K,M,\sigma} = \sqcup_{\tau \in \mathscr{P}_{K,L,\sigma}} \mathscr{P}_{L,M,\tau}$. Donc $[M : K]_s = \sum_{\tau \in \mathscr{P}_{K,L,\sigma}} [M : L]_s = [M : L]_s [L : K]_s$. **Q.e.d.**

Proposition 5.5 *Soit E/F une extension finie. L'extension E/F est séparable $\Leftrightarrow [E : F]_s = [E : F]$.*

Démonstration : Soient $x_1, ..., x_r \in E$ tels que $E = F(x_1, ..., x_r)$. Si $r = 1$: c'est déjà fait. Si $r > 1$: si $[E : F] = [E : F]_s$, alors pour tout $x \in E$, on a : $[E : F] = [E : F]_s \Rightarrow [F(x) : F] = [F(x) : F]_s$ donc x est séparable sur F. Réciproquement, si E/F est séparable, on a : $E/F(x_1)$ séparable et $F(x_1)/F$ séparable donc :

$$[E : F] = [E : F(x_1)][F(x_1) : F] = [E : F(x_1)]_s [F(x_1) : F]_s = [E : F]_s \ .$$

Q.e.d.

Corollaire 5.5.1 *Si $K \leq L \leq M$, alors M/K séparable $\Leftrightarrow$ M/L et L/K séparables. Si $E = K(x_1, ..., x_n)$ et si les x_i sont séparables sur K, alors E/K est séparable.*

6 Base normale

6.1 Éléments primitifs

Soit E/K une extension.
On dit que $x \in E$ est un élément *primitif* de E/K si $E = K(x)$.

Théorème 6.1 *Si $x, y \in E$ sont algébriques sur K, si y est séparable sur K, alors il existe $z \in E$ tel que $E = K(z)$. En particulier, si $x_1, ..., x_n \in E$ sont algébriques séparables, alors $K(x_1, ..., x_n)/K$ admet un élément primitif.*

Démonstration : Si K est fini, alors $K(x, y)$ aussi donc $K(x, y)^\times$ est cyclique et il suffit de prendre pour z un générateur du groupe $K(x, y)^\times$!

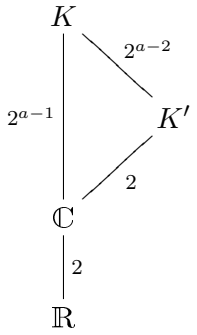
Si K est infini : notons P_x, P_y les polynômes minimaux de x et y sur K. Notons y_j les racines distinctes de P_y et x_i celles de P_x (dans une extension). Soit $0 \neq t \in K$ tel que les $x_i + ty_j$ soient deux à deux distincts (il suffit que $t \in K \setminus \{\frac{x_{i'} - x_i}{y_j - y_{j'}} \ : \ i, i', j, j', y_j \neq y_{j'}\}$. Posons $z := x + ty$. Alors $P_x(z - tY) \in K(z)[Y]$ a une seule racine en commun avec $P_y(Y) : y$. Donc le pgcd de $P_x(z - tY)$ et P_y est $Y - y$. Or, $P_y, P_x(z - tY) \in K(z)[Y]$ donc $Y - y \in K(z)[Y] \Rightarrow y \in K(z) \Rightarrow x, y \in K(z) \Rightarrow K(z) = K(x, y)$. **Q.e.d.**

Exercice : si E/K est finie, alors E/K admet un élément primitif si et seulement s'il existe un nombre fini de corps $K \leq L \leq E$.

Contre-exemple : si $K := \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$, $E := \mathbb{F}_p(X, Y)$, alors les corps $K(X + tY)$, $t \in K$ sont deux à deux distincts.

Théorème 6.2 (d'Alembert-Gauss) *Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.*

Démonstration : Le corps des réels n'admet pas d'extension de degré impair > 1. Si $K \geq \mathbb{C}$ est une extension de degré n, alors il existe $a \in K$ tel que $K = \mathbb{R}(a)$ car $K/\mathbb{R}$ est séparable (caractéristique nulle). Quitte à remplacer K par un corps de décomposition sur $\mathbb{R}$ du polynôme minimal de a, on peut supposer que $K/\mathbb{R}$ est galoisienne. Soit G son groupe de Galois, soit P un $2-$groupe de Sylow de G. Alors K^P est une extension d'ordre impair de $\mathbb{R}$ donc $K^P = \mathbb{R}$ et $P = G$. Mais alors, $|G| = 2^a$ pour un certain $a \geq 1$. Si $a > 1$, il existe un sous-groupe $H \leq \mathrm{Gal}(K/\mathbb{C}$ d'ordre 2^{a-2}. Mais alors K^H est une extension de degré 2 de $\mathbb{C}$ *absurdo !*



Q.e.d.

Exemple : soit k un corps. Soient $L := k(x_1, ..., x_n)$, $K := k(s_1, ..., s_n)$. Alors $a := x_1 x_2^2 ... x_n^n$ est un élément primitif de L sur K et x_n est un élément primitif pour $L^{\mathfrak{S}_{n-1}}/K$.

6.2 Théorème de la base normale

Soit E/K une extension galoisienne de groupe G. Une base $e_1, ..., e_n$ de E sur K est *normale* si pour tout i, il existe $\sigma \in G$ tel que $e_i = \sigma(e_1)$.

Exemple : le polynôme $P := X^4 + X + 1$ est primitif sur $\mathbb{F}_2$ et toute racine a de P dans $\mathbb{F}_{16}$ est un élément primitif de $\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2$. La base a, a^2, a^3, a^4 n'est pas normale (car $a^8 = \mathrm{Fr}_2^3(a) = a^4 + a^2 + a$).

Cependant :

Théorème 6.3 (de la base normale pour un corps fini) *Soient q une puissance d'un nombre premier, $d \geq 1$, $q' := q^d$. Il existe $\theta \in \mathbb{F}_{q'}$ tel que $\theta, \mathrm{Fr}_q\theta, ..., \mathrm{Fr}_q^{d-1}\theta$ est une base de $\mathbb{F}_{q'}$ sur $\mathbb{F}_q$.*

Lemme 6.4 *Le polynôme minimal du $\mathbb{F}_q-$endomorphisme Fr_q sur $\mathbb{F}_{q^d}$ est le polynôme $T^d - 1$.*

Démonstration : Il est clair que $\mathrm{Fr}_q^d = \mathrm{Id}$ sur $\mathbb{F}_{q^d}$. Si $P(\mathrm{Fr}_q) = 0$ avec $0 \neq P = a_0 + ... + a_N T^N \in \mathbb{F}_q[X]$, alors le polynôme $a_0 X + ... + a_N X^{q^N}$ s'annule sur $\mathbb{F}_q^d$ donc a au moins q^d racines donc son degré $q^N \geq q^d$ et $N \geq d$. **Q.e.d.**

Démonstration : Soit $T^d - 1 = P_1^{r_1} ... P_s^{r_s}$ la factorisation de $T^d - 1$ en irréductibles distincts dans $\mathbb{F}_q[T]$. Comme $\mathbb{F}_q-$espaces vectoriels, on a :

$$\mathbb{F}_{q'} = \oplus_i \ker(P_i^{r_i}(\mathrm{Fr}_q)) \ .$$

Comme $T^d - 1$ est le polynôme minimal de l'endomorphisme Fr_q, pour tout i, $P_i^{r_i}$ est le polynôme minimal de Fr_q sur $\ker(P_i^{r_i}(\mathrm{Fr}_q))$. Pour tout i, soit $x_i \in \ker(P_i^{r_i}(\mathrm{Fr}_q)) \leq \mathbb{F}_{q'}$ tel que $P_i^{r_i - 1}(\mathrm{Fr}_q)(x_i) \neq 0$. Alors l'idéal $\{P \in \mathbb{F}_q[X] \ : \ P(\mathrm{Fr}_q)(x_i) = 0\}$ contient $P_i^{r_i}$ mais non $P_i^{r_i - 1}$. Donc il est engendré par $P_i^{r_i}$!

On pose alors $\theta := x_1 + ... + x_s$. On a :

$$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \mathrm{Fr}_q^k(\theta) = 0 \Rightarrow \forall\, i,\ \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \mathrm{Fr}_q^k(x_i)$$

$$\Rightarrow \forall\, i,\ P_i^{r_i} | \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k T^k \Rightarrow T^d - 1 | \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k T^k$$

$$\Rightarrow \forall\, k,\ \lambda_k = 0 \ .$$

Q.e.d.

Remarque : si $\theta, ..., \theta^{2^{d-1}}$ est une base de $\mathbb{F}_{2^d}$ sur $\mathbb{F}_2$, alors $(a_0\theta + ... + a_{d-1}\theta^{2^{d-1}})^2 = a_{d-1}\theta + a_0\theta^2 + ... + a_{d-2}\theta^{2^{d-1}}$.

Théorème 6.5 (de la base normale pour les corps infinis) *Soit E/K une extension galoisienne. Il existe une base normale de E/K.*

Démonstration : Soit $e_1, ..., e_n$ une base de E/K. Soit $\mathrm{Gal}(E/K) =: \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ avec $\sigma_1 = \mathrm{Id}$. On pose $D(T_1, ..., T_n) := \mathrm{dét}((\sum_{k=1}^n T_k \sigma_i^{-1} \sigma_j(e_k))_{i,j}) \in E[T_1, ..., T_n]$. Comme la matrice $(\sigma_i(e_k))_{i,k} \in \mathrm{GL}_n(E)$, il existe $c_1, ..., c_n \in E$ tels que $\sum_k c_k \sigma_i(e_k) = 1$ si $i = 1$, 0 si $i \neq 1$. Mais alors $D(c_1, ..., c_n) = \mathrm{détdiag}(1, ..., 1) = 1 \Rightarrow D \neq 0$. Donc comme K est infini, on peut trouver $b_1, ..., b_n \in K$ tels que $D(b_1, ..., b_n) \neq 0$. Or :

$$D(b_1, ..., b_n) = \mathrm{dét}((\sigma_i^{-1}\sigma_j(x))_{i,j})$$

si $x := \sum_k b_k e_k$. **Q.e.d.**

Exemples :

a) $\{1 + i, 1 - i\}$ est une base normale pour $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

b) l'ensemble des conjugués de $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ est une base normale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ mais non celui des conjugués de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

c) Si p est un nombre premier, si $z := e^{2i\pi/p}$, alors $\{z, ..., z^{p-1}\}$ est une base normale mais non $\{1, z, ..., z^{p-2}\}$.

d) Soient $E = k(x_1, ..., x_n)$, $K := k(s_1, ..., s_n)$, $x := x_1 x_2^2 ....x_n^n$. Alors, $\{\sigma(x) : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est une base normale de E/K.

Remarque : le théorème signifie que le $k[G]-$ module E est libre de rang 1 (où $G := \mathrm{Gal}(E/K)$).

Remarque : soit E/K une extension galoisienne de groupe de Galois G. D'après le théorème de la base normale, $E \simeq K[G]$ comme $G-$module sur K.

Exercice : Montrer que $1+\epsilon_1\sqrt{2}+\epsilon_2\sqrt{3}+\epsilon_3\sqrt{6}$, $\epsilon_i = \pm 1$, $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ est une base normale pour $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

Exercice : Trouver une base normale de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)/\mathbb{Q}$.

COURS DU MERCREDI 17 MARS 2015

7 Extensions cyclotomiques

7.1 Racines primitives $n-$ièmes

Soit K un corps. Pour tout $n \geq 1$, on note $\mu_n(K)$ le sous-groupe de $K^\times$ formé des racines de $T^n - 1$.

Remarque : si L contient un corps de décomposition de $T^n - 1$ sur K et si $\mathrm{car}(K)$ ne divise pas n, $\mu_n(L)$ est cyclique d'ordre n. Les générateurs de $\mu_n(L)$ sont les *racines primitives $n-$ièmes de* 1.

Une *extension cyclotomique* est une extension de la forme $K(\zeta_n)/K$ où K est un corps de caractéristique première à n et ζ_n une racine primitive $n-$ième de 1 (dans un corps de décomposition de $T^n - 1$ sur K).

Théorème 7.1 *Soit une extension cyclotomique $K(\zeta_n)/K$ où K est un corps de caractéristique première à n et ζ_n une racine primitive $n-$ième de 1. Alors $K(\zeta_n)/K$ est galoisienne de groupe de galois isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.*

Démonstration : L'extension $K(\zeta_n)/K$ est galoisienne car c'est le corps de décomposition sur K du polynôme séparable $X^n - 1$.

Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\zeta_n)/K)$, $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{m_\sigma}$ pour un $m_\sigma \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Le morphisme $\sigma \mapsto m_\sigma$ est injectif. **Q.e.d.**

Corollaire 7.1.1 *Une extension cyclotomique est toujours abélienne.*

7.2 Polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$

Théorème 7.2 *Soit $\zeta_n \in \mathbb{C}^\times$ un élément d'ordre n. L'extension $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois $\simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que ζ_n est de degré $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ sur $\mathbb{Q}$. *cf.* la proposition suivante ... **Q.e.d.**

On note $\Phi_n(X) := \prod_{k\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}(X - e^{2ik\pi/n})$. C'est le *$n-$ième polynôme cyclotomique* .

Proposition 7.3 *(i)* $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ *est unitaire irréductible sur $\mathbb{Q}$, c'est le polynôme minimal de ζ_n sur $\mathbb{Q}$ pour tout ζ_n d'ordre n.*

(ii) $\deg \Phi_n = \varphi(n)$.

(iii) $T^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

(iv) $\Phi_n(X) = \prod_{d|n}(X^d - 1)^{\mu(n/d)}$.

Démonstration : Si on suppose que $\Phi_d(X)$ est unitaire à coefficients entiers, pour $d < n$, alors le quotient de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $\prod_{\substack{d|n\\ d<n}} \Phi_d(X)$ est un polynôme à coefficients entiers (unitaire). Or ce quotient est précisément $\Phi_n(X)$. Pour montrer l'irréductibilité de Φ_n, on considère P le polynôme minimal de ζ, une racine primitive $n-$ième de 1, sur $\mathbb{Q}$. On montre que si p est un nombre premier tel que $p \not| n$, $P(\zeta^p) = 0$.

Cela suffit car toute racine de Φ_n s'écrit $\zeta^{p_1\cdots p_m} = \zeta^{p_1\cdots p_n}$ pour certains nombres premiers p_i qui ne divisent pas n En effet, soit Δ le discriminant de $X^n - 1$. On a :

$$\Delta = \prod_{1\le i<j\le n}(\zeta^i - \zeta^j)^2 = \pm \prod_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}}(\zeta^i - \zeta^j)$$

$$= \pm \prod_{1\le i\le n} \zeta^i \prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq i}}(1 - \zeta^{j-i})$$

$$= \pm(\prod_{1\le k\le n-1}(1 - \zeta^k))^n$$

car $\zeta^{1+\ldots+n} = \zeta^{n(n+1)/2} = \pm 1$ (vu que $(\zeta^{n(n+1)/2})^2 = 1$). Donc :

$$\Delta = \pm(\frac{X^n - 1}{X - 1}(1))^n = \pm(1 + \ldots + X^{n-1})(1)^n = \pm n^n \ .$$

Notons $z_1, \ldots, z_r$ les racines de P. Comme $P|X^n - 1$ dans $\mathbb{Q}$, $P \in \mathbb{Z}[X]$. Donc $P(X^p) = P(X)^p \bmod p\mathbb{Z}[X]$. Si $P(\zeta^p) \neq 0$, $\zeta^p \notin \{z_1, \ldots, z_r\}$ et $P(\zeta^p) = \prod_{i=1}^r(\zeta^p - z_i)$ divise Δ dans $\mathbb{Z}[\zeta]$. Or $P(\zeta^p) = P(\zeta)^p = 0 \bmod p\mathbb{Z}[\zeta]$. Donc

$p|n^n$ dans $\mathbb{Z}[\zeta]$ donc dans $\mathbb{Z}$ car $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}[\zeta]=\mathbb{Z}$. C'est absurde car $p\not|n$. **Q.e.d.**

Exemple : si p premier, $\Phi_p = 1 + ... + X^{p-1}$.

Exercice : déterminer $\Phi_n(X)$ si $1 \leq n \leq 8$.

Exemple : $\Phi_{105}(X) = X^{48}+X^{47}+X^{46}-X^{43}-X^{42}-2X^{41}-X^{40}-X^{39}+X^{36}+X^{35}+X^{34}+X^{33}+X^{32}+X^{31}-X^{28}-X^{26}-X^{24}-X^{22}-X^{20}+X^{17}+X^{16}+X^{15}+X^{14}+X^{13}+X^{12}-X^9-X^8-2X^7-X^6-X^5+X^2+X+1$.

Exercice : $\mathbb{Q}(\zeta_n)\mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{\mathrm{ppcm}(m,n)})$; $\mathbb{Q}(\zeta_n)\cap\mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{\mathrm{pgcd}(m,n)})$; $\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_m) \Leftrightarrow \{n,m\} \subseteq \{k,2k\}$ pour un k impair. Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $K(\zeta_3) = K(\zeta_4)$; $\mathbb{Q}(\zeta_n)\cap\mathbb{R} = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$.

7.3 Théorème de Kronecker-Weber

Théorème 7.4 *Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne. Alors, $K \leq \mathbb{Q}(\zeta_n)$ pour une certaine racine primitive $n-$ième ζ_n.*

Exemple : $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(\zeta_4)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \leq \mathbb{Q}(\zeta_8)$.

Démonstration : Dans le cas où $K/\mathbb{Q}$ est quadratique : on introduit les sommes de Gauss :

si $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère, on pose pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\chi(a) := \chi(a \bmod N)$ si $(a, N) = 1$, 0 sinon.

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, soit $G_a(\chi) := \sum_{x=1}^{N-1} \chi(x)\zeta_N^{ax}$ où $\zeta_N := e^{2i\pi/N}$.

Proposition 7.5 *Si χ est primitif (*i.e. *si $M > 1$ est un diviseur strict de N, χ n'est pas trivial sur* $\ker((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times)$*), alors on a :*

(i) $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, $G_a(\chi) = \overline{\chi}(a)G_1(\chi)$;

(ii) $\overline{G_1(\chi)} = \chi(-1)G(\overline{\chi})$;

(iii) $|G_1(\chi)|^2 = N$.

Démonstration : Si $(a, N) = 1$, on a :

$$G_a(\chi) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(x)\zeta_N^{ax} = \sum_{y\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(ya^{-1})\zeta_N^{y}$$

$$= \chi(a^{-1}) \sum_{y\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(y)\zeta_N^{y}$$

$$= \overline{\chi(a)}G_1(\chi)\ .$$

Si $(a, N) = d > 1$, alors : $a = da'$ avec $a' \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ et :

$$G_a(\chi) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(x)\zeta_N^{da'x}$$

$$= \chi(a'^{-1}) \sum_{y\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(y)\zeta_N^{dy}$$

$$= \chi(a'^{-1}) \sum_{i=1}^{r} \sum_{h\in H_d} \chi(y_i h)\zeta_N^{dy_i h}$$

où $H_d := \ker\left((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/(N/d)\mathbb{Z})^\times \right)$ et $y_1, ..., y_r$ est un système de représentants de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times/H_d$.

Donc $G_a(\chi) = \chi(a'^{-1}) \sum_{i=1}^{r} \chi(y_i)\zeta_N^{y_i} \underbrace{\sum_{h\in H_d} \chi(h)}_{=0} = 0$ si on suppose $\chi|_{H_d}$ non trivial. Or, $\chi(a) = 0$ si $(a, N) = d > 1$. **Q.e.d.**

Corollaire 7.5.1 *Si p est un nombre premier impair, alors $G_1(\chi_p) = \pm\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}$, où $\chi_p : a \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$ est le symbole de Legendre.*

On en déduit que $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subseteq \mathbb{Q}(i, \sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)}) \subseteq \mathbb{Q}(i, \zeta_p) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{4p})$ ... **Q.e.d.**

Exercice : vérifier que $2\sin(2\pi/7) + 2\sin(3\pi/7) - 2\sin(\pi/7) = \sqrt{7}$.

8 Norme et trace

Soit E/K une extension finie. Si $\alpha \in E$, on note :

$$N_{E/K}(\alpha) := \text{dét}_K m_\alpha,\ \mathrm{Tr}_{E/K}(\alpha) := \mathrm{Tr}_K(m_\alpha)\ .$$

Exemple : $N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z) = |z|^2$, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z) = 2\Re z$.
Remarque : la norme est à valeurs dans $K^\times$ et la trace dans K.

Proposition 8.1 *Soient E/K une extension finie et $\alpha \in E$ de polynôme minimal sur K :*

$$T^n + a_1 T^{n-1} ... + a_n\ .$$

(i) *Si $E = K(\alpha)$, alors $N_{E/K}(\alpha) = (-1)^n a_n$ et $\mathrm{Tr}_{E/K}(\alpha) = -a_1$.*

(ii) *Si $[E : K(\alpha)] = r$, alors $N_{E/K}(\alpha) = (-1)^{nr} a_n^r$ et $\mathrm{Tr}_{E/K}(\alpha) = -ra_1$.*

(iii) *Transitivité : si $K \leq L \leq E$, $N_{E/K} = N_{L/K} \circ N_{E/L}$ et $\mathrm{Tr}_{E/K} = \mathrm{Tr}_{L/K} \circ \mathrm{Tr}_{E/L}$.*

(iv) *Si E/K est galoisienne de groupe de Galois $G = \{\sigma_1, ..., \sigma_m\}$, alors :*

$$N_{E/K}(\alpha) = \sigma_1(\alpha)...\sigma_m(\alpha),\ \mathrm{Tr}_{E/K}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) + ... + \sigma_m(\alpha)$$

Exercice : en utilisant la trace et la norme, montrer que $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ et que $1 + \sqrt[3]{2}$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Démonstration : Soit $\chi_{\alpha,E/K}$ le polynôme caractéristique de $m_\alpha : E \to E$. On a $\chi_{\alpha,E/K} = (\chi_{\alpha,K(\alpha)/K})^{[E:K(\alpha)]}$.

Pour la transitivité, on se ramène au cas où $E = L(x)$. Soit $X^r + a_1 X^{r-1} + ... + a_r \in L[X]$ le polynôme minimal de x sur L. Soit $e_1, ..., e_m$ une base de L/K. On a une base de E/K : $e_i x^j$, $1 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq r-1$. Dans cette base la matrice de la multiplication par x est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & -A_r \\ I_m & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & & \\ & \ddots & I_m & -A_1 \end{pmatrix}$$

où les $A_i \in \mathscr{M}_m(K)$ sont les matrices des m_{a_i} dans la base e_i.

On a alors : $N_{E/K}(x) = (-1)^{mr} \text{dét} A_r = (-1)^{mr} N_{L/K}(a_r) = (-1)^{mr} N_{L/K}((-1)^r N_{E/L}(x)) = N_{L/K}(N_{E/L}(x))$. **Q.e.d.**

9 Extensions cycliques

Une extension *cyclique* est une extension galoisienne de groupe de Galois cyclique.

Exemples : les extensions des corps finis, $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$, si p premier (où $\zeta_p := e^{2i\pi/p}$, $\mathbb{C}(t^{1/n})/\mathbb{C}(t)$ est galoisienne cyclique de groupe de Galois $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Contre-exemple : $\mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q}$.

9.1 Théorème 90 de Hilbert

Théorème 9.1 *Soit E/K une extension cyclique. Soit σ un générateur de $\text{Gal}(E/K)$. Si $b \in E$, alors sont équivalentes :*

i) $N_{E/K}(b) = 1$;

ii) $b = a\sigma(a)^{-1}$ *pour un certain* $a \in E^\times$.

Démonstration : Soit c tel que $a := bc + b\sigma(b)\sigma(c) + ... + \prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i(b)\sigma^{n-1}(c) \neq 0$ où $n := [E : K]$. On a $b = a/\sigma a$. **Q.e.d.**

Théorème 9.2 (Kummer) *Soit E/K une extension finie. On suppose que la caractéristique de K est première à n et que K contient une racine primitive $n-ième$ de l'unité.*

(i) Si E/K est cyclique de degré n, alors il existe $\alpha \in E$ tel que $E = K(\alpha)$ et $\alpha^n \in K$.

(ii) S'il existe $\alpha \in E$ tel que $E = K(\alpha)$ et $\alpha^n \in K$, alors E/K est galoisienne cyclique et il existe d tel que $d|n$, E/K est de degré d, $\alpha^d \in K$ et $T^d - \alpha^d$ est le polynôme minimal de α sur K.

Démonstration :

(i) on a $N(\zeta^{-1}) = \zeta^{-n} = 1$. Donc il existe $\alpha \in E$ tel que $\sigma\alpha/\alpha = \zeta$. Alors le polynôme minimal de α sur K P_α est de degré $\leq n$ et a au moins n racines distinctes :

$$\alpha, \sigma\alpha = \zeta\alpha, ..., \sigma^{n-1}\alpha = \zeta^{n-1}\alpha \ .$$

Donc $P_\alpha = (T - \alpha)...(T - \zeta^{n-1}\alpha) = T^n - \alpha^n$. En particulier, $\alpha^n \in K$ et $E = K(\alpha)$.

(ii) Il est clair que E/K est le corps de décomposition du polynôme séparable $X^n - \alpha^n$ sur K. Donc E/K est galoisienne. On a un morphisme injectif de groupes : $G := \mathrm{Gal}(E/K) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $s \mapsto k_s$ où $s\alpha/\alpha = \zeta^{k_s}$. Donc $\mathrm{Gal}(E/K)$ est cyclique. Soit $d := |\mathrm{Gal}(E/K)|$. Soit s un générateur de G. On a $s(\alpha) = \zeta^{k_s}\alpha$ où $s^d = \mathrm{Id} \Rightarrow k_s = 0 \bmod n/d$. Mais alors $s(\alpha^d) = \alpha^d$ et $\alpha^d \in K$. Donc $d = [K(\alpha) : K] \Rightarrow T^d - \alpha^d$ est le polynôme minimal de α sur K.

Q.e.d.

Exercice : soit p un nombre premier. Vérifier que l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_n, \sqrt[n]{p})/\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est galoisienne cyclique de groupe de Galois $\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si n est impair (on note $\zeta_n := e^{2i\pi/n}$). Si $n = 8$, déterminer $[\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, \zeta_8) : \mathbb{Q}(\zeta_8)]$.

Exercice : si E/K est galoisienne cyclique de degré $p = \mathrm{car}(K)$, alors il existe $\alpha \in E$, $a \in K$ tels que $E = K(\alpha)$ et $\alpha^p - \alpha - a = 0$.

Cours du mardi 7 avril 2015

10 Résolubilité par radicaux

Une extension L/K est *résoluble* s'il existe $E \geq L \geq K$ telle que E/K est galoisienne de groupe de Galois résoluble.

On rappelle qu'un groupe fini G est *résoluble* s'il existe une suite de sous-groupes :

$$G = G_0 \geq ... \geq G_n = 1$$

tels que $G_{i+1} \lhd G_i$ et G_i/G_{i+1} est cyclique d'ordre un nombre premier p qui divise $|G|$.

Remarque : cela revient à dire que $\mathscr{D}^n(G) = 0$ si $n >> 0$.

Exemple : le groupe $\mathfrak{S}_4$ est résoluble mais non le groupe $\mathfrak{S}_5$.

Exercice : si $H \lhd G$, G est résoluble $\Leftrightarrow$ H et G/H résolubles.

Soit K un corps de caractéristique nulle. On dit qu'une extension L/K est *résoluble par radicaux* s'il existe une tour d'extensions $K = K_0 \leq .... \leq K_m = E \geq L$ telle que :

$\forall j \geq 1$, $\exists \alpha_j \in K_{j+1}$, $n_j > 0$, $K_{j+1} = K_j(\alpha_j)$ et $\alpha_j^{n_j} \in K_j$, $[K_j(\alpha_j) : K_j] = n_j$.

Si $\mathrm{car}(K) = 0$, si $f \in K[X]$, on dit que f est résoluble par radicaux s'il existe une tour d'extensions $K = K_0 \leq .... \leq K_m$ telle que :

$\forall j \geq 1$, $\exists \alpha_j \in K_{j+1}$, $n_j > 0$, $K_{j+1} = K_j(\alpha_j)$ et $\alpha_j^{n_j} \in K_j$, $[K_j(\alpha_j) : K_j] = n_j$

et f est scindé dans K_m.

Exemple : le polynôme $X^7 - 1$ est résoluble par radicaux sur $\mathbb{Q}$ car ...

Théorème 10.1 *Soit K de caractéristique nulle. Une extension finie L/K est résoluble par radicaux si et seulement si elle est résoluble.*

Lemme 10.2 *On suppose* $\mathrm{car}(K) = 0$. *Soit L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G. Soit $K' \geq K$. Soit E un corps qui contient L, K'. Alors LK'/K' est galoisienne de groupe de Galois isomorphe à un sous-groupe de G.*

Démonstration : On peut supposer que E/K est galoisienne. Montrons que $\mathrm{Gal}(E/LK') \triangleleft \mathrm{Gal}(E/K')$. Soient $s \in \mathrm{Gal}(E/LK')$, $t \in \mathrm{Gal}(E/K')$. On a $tst^{-1}(x) = x$ si $x \in K'$. Si $x \in L$, $t^{-1}(x) \in L$ car L/K est galoisienne donc $tst^{-1}(x) = tt^{-1}(x) = x$. Donc $tst^{-1} \in \mathrm{Gal}(E/LK')$. De plus, le morphisme de groupes $\mathrm{Gal}(LK'/K') \to \mathrm{Gal}(L/K)$, $s \mapsto s|_L$ est injectif. **Q.e.d.**

Démonstration :

résoluble $\Rightarrow$ résoluble par radicaux :

Supposons L/K galoisienne de groupe de Galois G résoluble. Nous allons montrer par récurrence sur $n = |G| = [L : K]$ que L/K est résoluble par radicaux. Si $n = 1$, il n'y a rien à faire. Si $n > 1$ ...

Il existe des sous-groupes $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_N = e$ tels que $\forall\ i$, $G_{i+1} \triangleleft G_i$ et G_i/G_{i+1} est cyclique d'ordre premier p_i. Posons $n' := \prod_{p_i \text{ distincts}} p_i \leq n$. Soit ζ une racine primitive n'ième de l'unité dans une extension de K. On a $[K(\zeta) : K] \leq \varphi(n') < n' \leq n$. Donc par hypothèse de récurrence il existe une suite d'extensions par radicaux :

$$K = K_0 \leq ... \leq K_N \geq K(\zeta)\ .$$

Soit $K' := K_N$. Posons $L_i := L^{G_i}$. On a L_{i+1}/L_i galoisienne de groupe de Galois cyclique G_i/G_{i+1}. Pour tout i, $L_{i+1}K'/L_iK'$ est galoisienne de groupe de Galois trivial ou isomorphe à G_i/G_{i+1} d'après le lemme ci-dessus.

Dans ce dernier cas, d'après le théorème de Kumer, $L_{i+1}K' = L_iK'(\alpha_i)$ pour un certain $\alpha_i \in L_{i+1}K'$ tel que :

$$[L_{i+1}K'/L_iK'] = p_i \text{ et } \alpha_i^{p_i} \in L_iK' \ .$$

On a donc une tour d'extensions radicales :

$$K = K_0 \leq K_1 \leq ... \leq K_N \leq K_{N+1} \leq ... \leq K_{N+M} \geq LK' \geq L$$

où $K_{N+j} := L_jK'$.

Donc L/K est résoluble par radicaux.

Réciproquement, démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 10.3 *Soient $K \leq L \leq M$. On suppose* $\text{car}(K) = 0$. *L'extension M/K est résoluble si et seulement si M/L et L/K le sont.*

Attention ! si $K \leq L \leq M$ et si L/K et M/L sont galoisiennes, M/K n'est pas forcément galoisienne : par ex. : $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \geq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \geq \mathbb{Q}$.

Démonstration :

Supposons L/K et M/L résolubles. Soit $E \geq M \geq L \geq K$ avec E/K galoisienne. Soit L' le sous-corps de E engendré par les $\sigma(L)$ où σ décrit $\text{Gal}(E/K)$. Alors $E \geq L' \geq L \geq K$ et L'/K est galoisienne de groupe de Galois $\text{Gal}(L'/K)$ résoluble. De même, soit M' le sous-corps de E engendré par les $\sigma(M)$ où σ décrit $\text{Gal}(E/L)$. Alors, $E \geq M' \geq M \geq L$ tel que M'/L est galoisienne de groupe de Galois $\text{Gal}(M'/L)$ résoluble. Soit M" le sous-corps de E engendré par les $\sigma(M')$ où σ décrit $\text{Gal}(E/K)$. Alors $M" \geq M, L' \geq K$ et $M"/K$ est galoisienne. Or, $\text{Gal}(M"/L')$ est résoluble car isomorphe à un sous-groupe de :

$$\prod_{\sigma \in \text{Gal}(E/K)} \text{Gal}(\sigma(M')/L') \leq \prod_{\sigma \in \text{Gal}(E/K)} \underbrace{\text{Gal}(\sigma(M')/\sigma(L))}_{\simeq \text{Gal}(M'/L)} \ .$$

Comme $\text{Gal}(M"/K)/\text{Gal}(M"/L') \simeq \text{Gal}(L'/K)$ est aussi résoluble, $\text{Gal}(M"/K)$ est résoluble.

Par ex. : si $M = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), K = \mathbb{Q}$, $M" = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$. **Q.e.d.**

On suppose que l'on a une tour d'extensions :

$$K = K_0 \leq ... \leq K_N \geq L$$

où $\forall\ i$, $K_{i+1} = K_i(\alpha_i)$ pour un $\alpha_i \in K_{i+1}$ tel que $[K_{i+1} : K_i] = n_i$ et $\alpha_i^{n_i} \in K_i$. Posons $n := \prod_i n_i$ et ζ une racine primitive $n-$ième de l'unité dans une extension de K. On a les inclusions :

$$K = K_0 \leq K(\zeta) \leq K_1(\zeta) \leq ... \leq K_N(\zeta) \ .$$

Pour tout i, l'extension $K_{i+1}(\zeta)/K_i(\zeta)$ est résoluble car galoisienne cyclique (*cf.* le théorème de Kummer). L'extension $K(\zeta)/K$ aussi est résoluble car galoisienne de groupe de Galois abélien (isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z})^\times$). Donc par le lemme précédent, on en déduit par récurrence que $K_N(\zeta)/K$ est résoluble.

Q.e.d.

Rappelons le :

Théorème 10.4 *Soit K de caractéristique nulle. Une extension L/K est résoluble si et seulement si elle est résoluble par radicaux.*

Si $P \in K[X]$ est un polynôme séparable, on dit que P est résoluble par radicaux si le corps de décomposition de P sur K est résoluble par radicaux (sur K) *i.e.* toutes les racines de P sont dans une extension résoluble par radicaux sur K.

Exemple : $X^7 - 1$ est résoluble par radicaux sur $\mathbb{Q}$ car $e^{2i\pi/7} = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ où $x := -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7+21i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7-21i\sqrt{3}}{2}}\right)$.

Théorème 10.5 (Galois) *Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré p premier. Alors sont équivalentes :*

(i) *P est résoluble par radicaux ;*

(ii) *pour toutes racines $x_1 \neq x_2$ de P, $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ est le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de P ;*

(iii) *il existe x_1, x_2 racines de P telles que $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ est le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de P.*

Démonstration : *ii* $\Rightarrow$ *iii* : facile ; *iii* $\Rightarrow$ *i* : le groupe de Galois G de $\mathbb{Q}(x_1, x_2)/\mathbb{Q}$ est d'ordre $\leq p(p-1)$ car $\sigma \in G$ est déterminé par $\sigma(x_1)$ et $\sigma(x_2)$. Donc G contient un seul $p-$groupe par exemple : $H := \langle(12....p)\rangle$. Donc $H \lhd G$ et $G \leq N_{\mathfrak{S}_p}(H)$. Or $N_{\mathfrak{S}_p}(H)/H$ est cyclique comme nous allons le voir. **Q.e.d.**

Théorème 10.6 *Soit p un nombre premier. Soit Aff_p le groupe des bijections affines $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$, $z \mapsto az + b$, où $a \in \mathbb{F}_p^\times$, $b \in \mathbb{F}_p$. On peut identifier Aff_p avec un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ en associant à $x \mapsto ax + b$ la permutation : $i \mapsto [ai + b]$, représentant de $ai + b$ dans $\{1, ..., p\}$. Alors Aff_p est le normalisateur de $\langle(12...p)\rangle$ et $\mathrm{Aff}_p/\langle(12...p)\rangle \simeq \mathbb{F}_p^\times$ est cyclique (donc Aff_p est résoluble).*

Tout sous-groupe transitif et résoluble de $\mathfrak{S}_p$ est conjugué à un sous-groupe de Aff_p.

Démonstration :

Dans $\mathfrak{S}_p$, il y a $(p-2)!$ sous-groupes d'ordre p donc le normalisateur du sous-groupe engendré par le $p-$cycle $(12...p)$ est d'ordre $p(p-1)$. Or Aff_p est d'ordre $p(p-1)$ et est contenu dans le normalisateur de $\langle(12...p)\rangle$. Donc $\mathrm{Aff}_p = N_{\mathfrak{S}_p}(\langle(12...p)\rangle)$. De plus Aff_p est résoluble car $\mathrm{Aff}_p/\langle(12...p)\rangle \simeq (\mathbb{F}_p)^\times$.

Soit $H \subseteq \mathfrak{S}_p$ un sous-groupe transitif. Si $H' \lhd H$, alors les $H'-$orbites dans $\{1,...,p\}$ sont $H-$stables et de même cardinal car $H'hx = hH'x$. Il y en a donc p ou 1. Donc $H' = 1$ ou H' est encore transitif. On en déduit que si $1 \neq H'$, H' contient autant de $p-$Sylow que H (car H' est distingué et les $p-$Sylow sont conjugués). Donc si H est résoluble transitif, H contient un seul $p-$sous-groupe de Sylow. Donc est contenu dans le normalisateur du groupe engendré par un $p-$cycle qui est conjugué à Aff_p. **Q.e.d.**

Corollaire 10.6.1 *Si H est un sous-groupe transitif et résoluble de $\mathfrak{S}_p$, alors si $h \in H$ a deux points fixes dans $\{1,...,p\}$, $h = 1$.*

Démonstration : Il suffit de vérifier que si $h \in \mathrm{Aff}_p$ a deux points fixes, alors $h = 1$. **Q.e.d.**

Fin de la démonstration du théorème de Galois : $i \Rightarrow ii$: soit L un corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$, soient x_1, x_2 deux racines de P, si $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(x_1,x_2))$, σ est dans un sous-groupe résoluble transitif de $\mathfrak{S}_p$ avec au moins deux points fixes donc $\sigma = 1$. Donc $L = \mathbb{Q}(x_1,x_2)$ *q.e.d.*

Corollaire 10.6.2 *Si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme résoluble par radicaux irréductible de degré p premier, alors P a une seule ou toutes ses racines réelles.*

Démonstration : S'il y a au moins 2 racines réelles x_1, x_2, alors $\mathbb{Q}(x_1,...,x_p) = \mathbb{Q}(x_1,x_2) \leq \mathbb{R}$ et tous les x_i sont réels ! **Q.e.d.**

Exemple : le polynôme $X^5 - 4X + 2$ n'est pas résoluble par radicaux sur $\mathbb{Q}$.

Cours du mardi 21 avril 2015

11 Calcul du groupe de Galois

11.1 Discriminant

Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \in K^\times$ sur un corps K de caractéristique $\neq 2$. On note $x_1,...,x_n$ les racines de P dans un corps de décomposition. Alors :

$$\Delta_P := a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$$

est le discriminant de P. On a $\Delta_P \in K$.

Remarque : si P est unitaire, alors on a $\Delta_p = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} P'(x_i)$.

Exercice 1 *Si P est unitaire de degré n, alors $\Delta_P = (-1)^{n(n-1)/2} n^n \prod_{j=1}^{n-1} P(\eta_j)$ où les η_j sont les racines de P'.*

Exercice 2 *Si $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$, $\Delta_P = b^2 - 4ac$. Si $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ est de degré 3, alors : $\Delta_P = a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$.*

Exercice 3 *Si P est de degré n, alors Δ_P est un polynôme à coefficients entiers, homogène de degré $2n-2$ en les coefficients de P.*

Théorème 11.1 *Si P est séparable, si G est le groupe de Galois de P sur K, vu comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, alors*

$$G \leq \mathfrak{A}_n \Leftrightarrow \Delta \in (K^\times)^2 \ .$$

Démonstration : Soit L le corps de décomposition de P sur K. Posons $\delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j) \in L$. Alors $\Delta \in (K^\times)^2 \Leftrightarrow \delta \in K \Leftrightarrow \delta \in L^G$. Or si $\sigma \in G$, $\sigma(\delta) = \epsilon(\sigma)\delta$. Donc $\delta \in K \Leftrightarrow \forall\, \sigma \in G,\ \epsilon(\sigma) = 1$. **Q.e.d.**

Exercice : déterminer le discriminant de $P := X^5 + 20X + 16$ et en déduire que le groupe de Galois de P est contenu dans A_5 (*indication : vérifier que* $\Delta_p = 2^{16}.5^6$).

11.2 Réduction modulo un nombre premier

Soit $P \in K[T]$, un polynôme séparable *unitaire* de degré n.

Soit L un corps de décomposition sur K du polynôme P. Soient $a_1, ..., a_n$ les racines de P dans L. On pose :

$$\theta := u_1a_1 + ... + u_na_n \in L[u_1, .., u_n]$$

$$\forall\, s \in \mathfrak{S}_n,\ \theta^s := u_{s(1)}a_1 + ... + u_{s(n)}a_n \ .$$

Remarque : les θ^s, $s \in \mathfrak{S}_n$ sont deux à deux distincts.

On note $F(T, u) := \prod_{s \in \mathfrak{S}_n}(T - \theta^s) \in L[u_1, ..., u_n, T]$. Alors $F(T, u) \in K[T, u]$. En effet, $\forall\, s \in \mathfrak{S}_n$, $\theta^s = u_1a_{s^{-1}(1)} + ... + u_na_{s^{-1}(n)}$. Donc $F(T, u) \in \mathbb{Z}[T, u, \sigma_1, ..., \sigma_n]$ où $\sigma_1, ..., \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les a_i :

$$\forall\, k,\ \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1}...a_{i_k}$$

$$= \pm \text{ le coefficient de degré } n-k \text{ de } P(T) = (T - a_1)...(T - a_n) \ .$$

En particulier, $F(T, u) \in K[T, u]$.

Remarque : si $P(T) \in A[T]$ où A est un anneau intègre de corps des fractions K, alors $F(T,u) \in A[T,u]$.

Soit

$$F(T,u) = F_1(T,u)...F_r(T,u)$$

la décomposition de F en produits d'irréductibles dans $K[u_1,...,u_n,T]$.

On pose :

$$\mathfrak{g} := \{s \in \mathfrak{S}_n \ : \ F_1^s = F_1\}$$

Théorème 11.2 *Supposons que F_1 est le facteur irréductible qui annule θ. On peut identifier $G := \mathrm{Gal}_P := \mathrm{Gal}(L/K)$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ via :*

$$\sigma(a_i) = a_{\sigma(i)}$$

pour tout i et tout $\sigma \in G$.

Avec cette identification, on a $\mathfrak{g} = G$.

Démonstration : Soit $s \in G$. On a $F_1^s(\theta^s) = (F_1(\theta))^s = 0$. Or $\theta^s = u_1 a_{s^{-1}(1)} + ... + u_n a_{s^{-1}(n)} = s^{-1}.{}_G(\theta) = s^{-1}(\theta)$ (où on considère l'action de G sur $L[u][T]$ induite par l'action de G sur L). Donc $F_1^s(s^{-1}(\theta)) = 0 \Rightarrow s^{-1}(F_1^s(\theta)) = 0 \Rightarrow F_1^s(\theta) = 0$. Donc F_1^s (qui est l'un des F_i) et F_1 ont une racine commune donc sont égaux !

Réciproquement soit $s \in \mathfrak{g}$. Comme $F_1(\theta) = 0$, F_1 s'annule en tous les $\sigma(\theta)$, $\sigma \in G$. Donc F_1 est divisible dans $L[u][T]$ par $\prod_{\sigma \in G}(T - \sigma(\theta)) \in K[u][T]$. Or F_1 est irréductible donc $F_1 = \prod_{\sigma \in G}(T - \sigma(\theta))$. En particulier les racines de F_1 sont les $\sigma(\theta) = \theta^{\sigma^{-1}}$, $\sigma \in G$, où on voit σ^{-1} dans $\mathfrak{S}_n$. Mais $F_1^s = F_1 \Rightarrow F_1$ s'annule en $\theta^s \Rightarrow \theta^s = \theta^{\sigma^{-1}}$ pour un $\sigma \in G \Rightarrow s = \sigma^{-1} \in G$.

Q.e.d.

Corollaire 11.2.1 *Soient A un anneau factoriel, $\mathfrak{p} \leq A$ un idéal premier, $K := \mathrm{Frac}(A)$, $\overline{K} := \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$. Soit $P \in A[T]$ unitaire, séparable sur K de degré n tel que $\overline{P}$ est aussi séparable sur $\overline{K}$. Alors le groupe $\overline{G} := \mathrm{Gal}_{\overline{P}/\overline{K}}$ est conjugué dans $\mathfrak{S}_n$ à un sous-groupe de $\mathrm{Gal}_{P/K}$.*

Démonstration : Soient $a_1,...,a_n$ les racines de P dans un corps de décomposition L de K. Soient $b_1,...,b_n$ les racines de $\overline{P}$ dans un corps de décomposition $\overline{L}$ de $\overline{K}$. Soient $\theta := u_1a_1 + ... + u_na_n$ et $\overline{\theta} := u_1b_1 + ... + u_nb_n$.

Soient $F(u,T) := \prod_{s \in \mathfrak{S}_n}(T - \theta^s)$ et $\overline{F}(u,T) := \prod_{s \in \mathfrak{S}_n}(T - \overline{\theta}^s) \in A/\mathfrak{p}[u,T]$. Ce sont des polynômes séparables : en effet, les racines b_i sont 2 à 2 distinctes donc les racines de $\overline{F}$ aussi ; de même pour F. De plus, $\overline{F}$ est la réduction de F mod $\mathfrak{p}$. En effet, soit $S(u,Y,T) := \prod_{s \in \mathfrak{S}_n}(T - (u_{s(1)}Y_1 + ... + u_{s(n)}Y_n))$. Alors $S(u,Y,T) = \prod_{s \in \mathfrak{S}_n}(T - (u_1Y_{s^{-1}(1)} + ... + u_nY_{s^{-1}(n)})) \in \mathbb{Z}[u,\Sigma_1,...,\Sigma_n,T]$ où les Σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires en les Y_i. Si $P = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + ... + (-1)^n\sigma_n$, F est le polynôme obtenu à partir de $S(u,Y,T) \in$

$\mathbb{Z}[u, \Sigma_1, ..., \Sigma_n, T]$ en remplaçant Σ_i par σ_i. De même pour $\overline{F}$ avec $\sigma_i \bmod \mathfrak{p}$ à la place de σ_i.

Soit $F = F_1...F_r$ la décomposition de F en produits d'irréductibles de $K[u, T]$. On suppose que $F_1(\theta) = 0$ où $\theta := u_1a_1 + ... + u_na_n$. Quand on identifie G à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ via l'action sur les racines a_i, on a $G = \{s \in \mathfrak{S}_n \ : \ F_1^s = F_1\}$. On pose $\overline{\theta} := u_1b_1 + ... + u_nb_n$. Quitte à renuméroter les b_i, on peut supposer que $\overline{F_1}(\overline{\theta}) = 0$. Comme $\overline{F}$ est séparables, les $\overline{F_i}$ sont deux à deux premiers entre eux. Soit $\overline{H}$ le facteur irréductible de $\overline{F}$ dans $\overline{K}[u, T]$ qui annule $\overline{\theta}$. On a $\overline{H}|\overline{F_1}$. Donc si $s \in \mathfrak{S}_n$, représente un élément de $\overline{G}$, on a $\overline{H}^s = \overline{H}$ qui divise $\overline{F_1}^s = \overline{F_1^s}$. Or $F_1^s = F_i$ pour un certain $1 \leq i \leq r$ et comme les $\overline{F_j}$ sont deux à deux premiers entre eux, $\overline{F_i}$ et $\overline{F_1}$ ont un facteur commun ($\overline{H}$) donc sont égaux et $i = 1$ *i.e.* $F_1^s = F_1 \Leftrightarrow s \in G$. **Q.e.d.**

Application : Soit $P \in \mathbb{Z}[T]$ un polynôme séparable. Soit p un nombre premier. On suppose que $P \bmod p$ est séparable sur $\mathbb{F}_p$. Soit $\overline{P} = \phi_1...\phi_r$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_p[T]$. Alors le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$ contient un $\sigma = c_1...c_r$ où les c_i sont des cycles à supports disjoints de longeurs respectives les $\deg \phi_i$.

En effet, soit $\overline{G}$ le groupe de Galois de $\overline{P}$ sur $\mathbb{F}_p$. C'est un groupe cyclique ; soit c un générateur. Pour tout i, l'action de c sur l'ensemble des racines de ϕ_i est transitive. Donc c est un produit de s cycles à supports disjoints de longeurs respectives les $\deg \phi_i$.

Exemple : $P := T^5 - T - 1$ est irréductible modulo 5 et $P = (T^2 + T + 1)(T^3 + T^2 + 1) \bmod 2$ donc son groupe de Galois G, vu comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$ contient un $5-$cycle et un produit d'un $3-$cycle et d'une transposition à supports disjoints : $c\tau$. Donc $(c\tau)^3 = \tau \in G$ et G contient un $5-$cylce et une transposition. Cela suffit pour dire que $G = \mathfrak{S}_5$.

Exercice : Montrer que le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ de $X^5 + 20X + 16$ est $\simeq \mathfrak{A}_5$ (*indication : réduire modulo* 3 *et modulo* 7).

12 Théorie de la ramification

12.1 Éléments entiers sur un anneau

Soient $A \leq B$ deux anneaux. On dit que $b \in B$ est entier sur A s'il existe $a_1, ..., a_n \in A$ tels que :

$$b^n + a_1b^{n-1} + ... + a_n = 0 \ .$$

Si tous les éléments de B sont entiers sur A, on dit que Best entier sur A.

Exemple : $\sqrt{2}$ est entier sur $\mathbb{Z}$ mais non $1/\sqrt{2}$.

Proposition 12.1 *Soit $b \in B$. Sont équivalentes :*

(i) *b est entier sur A ;*

(ii) *$A[b]$ est un $A-$module de type fini ;*

(iii) *il existe un $A[b]-$module fidèle qui est un $A-$module de type fini.*

Démonstration : *iii* $\Rightarrow$ *i* : soit M un $A[b]-$module fidèle qui est un $A-$module de type fini. Soient $e_1, ..., e_n$ des générateurs. Il existe des coefficients $a_{i,j} \in A$ tels que :

$$\forall\, j,\, be_j = \sum_i a_{i,j} e_j \ .$$

On en déduit par récurrence sur n que $\forall\, j\ b^n e_j = \sum_i (M^n)_{i,j} e_i$ où $M := (a_{i,j})$. Mais alors, $\chi_M(b) e_j = \sum_i \chi_M(M)_{i,j} e_i = 0$ pour tout j. Donc $\chi_M(b)M = 0 \Rightarrow \chi_M(b) = 0$ car M est fidèle. Or, $\chi_M(X)$ est unitaire à coefficients dans A. **Q.e.d.**

Corollaire 12.1.1 *L'ensemble des éléments $b \in B$ entiers sur A est un sous-anneau de B.*

Démonstration : Si b_1, b_2 sont entiers sur A, alors $A[b_1]$ est un $A-$module de type fini tout comme $A[b_2]$. Donc $A[b_1, b_2]$ est un $A-$module de type fini. Si $x = b_1 \pm b_2$ ou $b_1 b_2$, alors $A[x] \subseteq A[b_1, b_2]$ qui est un $A[x]-$module fidèle. Donc x est entier sur A

Q.e.d.

Cours du mardi 28 avril 2015

Exercice 4 *Soient $A \leq B \leq C$ trois anneaux. Alors C entier sur B et B entier sur $A \Rightarrow C$ entier sur A.*

Exercice : si $x \in \mathbb{C}$, alors x est entier sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si son polynôme minimal unitaire est à coefficients entiers.

12.2 Anneaux de Dedekind

Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension *finie*. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des éléments de K entiers sur $\mathbb{Z}$.

Exemples : $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Proposition 12.2 *i) L'anneau $\mathcal{O}_K$ est intègre ;*

ii) l'anneau $\mathcal{O}_K$ est nœthérien i.e. *toute suite croissante d'idéaux $I_1 \leq ... \leq I_k \leq ...$ a un élément maximal* i.e. *tout idéal I de $\mathcal{O}_K$ peut être engendré par un nombre fini d'éléments ;*

iii) *l'anneau $\mathcal{O}_K$ est intégralement clos* i.e. *si $x \in K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_K)$, est entier sur $\mathcal{O}_K$, alors $x \in \mathcal{O}_K$;*

iv) *tout idéal premier non nul de $\mathcal{O}_K$ est maximal.*

Démonstration : ii : soit $e_1, ..., e_n$ une base de $K/\mathbb{Q}$. On peut choisir les $e_i \in \mathcal{O}_K$. Considérons : $K \to \mathbb{Q}^n$, $x \mapsto (\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(xe_1), ...\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(xe_n))$. C'est $K-$linéaire et ça envoie $\mathcal{O}_K$ dans $\mathbb{Z}^n$. C'est injectif car $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(xe_i) = 0$ pour tout $i \Rightarrow \mathrm{Tr}(xK) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\mathrm{Tr} = 0$ absurde ! Donc $\mathcal{O}_K$ est un $\mathbb{Z}-$module de type fini. Si $I \leq \mathcal{O}_K$ est un idéal, c'est aussi un $\mathbb{Z}-$module de type fini.

iv : soit P un idéal premier non nul. $\mathcal{O}_K/P$ est entier sur $\mathbb{Z}/(P \cap \mathbb{Z})$. Soit $x \in P$ non nul. $x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$ pour certains entiers a_i avec $a_n \neq 0$. Alors $0 \neq a_n \in P \cap \mathbb{Z}$. Donc $P \cap \mathbb{Z} = (p)$ pour un certain nombre premier p. Donc $\mathcal{O}_K/P$ est un corps et P est maximal. **Q.e.d.**

Définition 6 *Un anneau intègre A qui est intégralement clos, nœthérien et dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux est un anneau de Dedekind.*

Exemple : les corps, $\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}$, les anneaux de la forme $\mathbb{C}[X,Y]/(f)$ où $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ est irréductible et $(f, \partial_X f, \partial_Y f) = 1$.

Théorème 12.3 (Factorisation unique en produit d'idéaux premiers) *Tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_K$ s'écrit :*

$$a = P_1 ... P_r$$

pour certains P_i idéaux premiers non nuls de $\mathcal{O}_K$ uniques à permutation près des termes.

Exemple : dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}$, $6 = 2.3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ donc O n'est pas factoriel, mais on a bien : $(6) = P_1^2 P_2 P_3$ avec $P_1 = (2, 1+\sqrt{-5})$, $P_2 = (3, 2+\sqrt{-5})$, $P_3 = (3, 2-\sqrt{-5})$.

Lemme 12.4 *Soit $\mathfrak{a} \leq \mathcal{O}_K$ un idéal non nul. Il existe $P_1, ..., P_r$ des idéaux premiers non nuls tels que $\mathfrak{a} \geq P_1 ... P_r$.*

Démonstration : Par l'absurde : soit I un idéal maximal parmi ceux qui n'ont pas la propriété voulue. Alors I n'est pas premier. Soient x, y tels que $xy \in I$ mais $x, y \notin I$. Par maximalité, $I + (x) \geq P_1 .... P_r$ et $I + (y) \geq Q_1 .... Q_s$ pour certains idéaux premiers non nuls P_i, Q_j. Mais alors $I \geq (I + (x))(I + (y)) \geq P_1 .... P_r Q_1 .... Q_s$ d'où la contradiction ! **Q.e.d.**

Lemme 12.5 *Soit $P \leq \mathcal{O}_K$ un idéal premier non nul. On pose :*

$$P^{-1} := \{x \in K \ : \ xP \leq \mathcal{O}_K\} \ .$$

Alors $\mathcal{O}_K \subsetneq P^{-1}$ et si $\mathfrak{a} \leq \mathcal{O}_K$ est un idéal non nul, $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}P^{-1}$.

Remarque : $P^{-1} \geq \mathcal{O}_K$.

Démonstration : On montre d'abord que $P^{-1} \neq \mathcal{O}_K$. Soit $a \in P$ non nul. Soient $P_1, ..., P_r$ des idéaux premiers non nuls avec r minimal tels que $P_1....P_r \leq (a) \leq P$. Comme P est premier, l'un des P_i par ex. P_1 est P. Comme r est minimal, il existe $b \in P_2....P_r$ tel que $b \notin (a)$. Mais alors $a^{-1}b \notin \mathcal{O}_K$. Or $bP = bP_1 \leq (a) \Rightarrow a^{-1}bP \leq \mathcal{O}_K \Rightarrow a^{-1}b \in P^{-1}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $a \leq \mathcal{O}_K$ un idéal non nul tel que $aP^{-1} = a$. Soient $x_1, ..., x_n$ des générateurs de a comme $\mathbb{Z}-$modules. Si $y \in P^{-1}$, on a :

$$yx_i = \sum_j a_{i,j}x_j$$

pour certains $a_{i,j} \in \mathcal{O}_K$. Soit $A := (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathcal{O}_K)$. On a $\chi_A(y)x_i = \sum_j \chi_A(A)_{i,j}x_j = 0$ pour tout i. Donc $\chi_A(y) = 0$ et y est entier sur $\mathcal{O}_K$. Donc $y \in \mathcal{O}_K$. donc $P^{-1} \leq \mathcal{O}_K$ absurde !

Q.e.d.

Démonstration du théorème de factorisation :

Existence : par l'absurde : soit $\mathfrak{a} \leq \mathcal{O}_K$ un idéal maximal pour la propriété de nêtre pas factorisable en produits d'idéaux premiers. Il existe P un idéal maximal (premier non nul) tel que $\mathfrak{a} \leq P$. On a :

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}P^{-1} \leq PP^{-1} \leq \mathcal{O}_K \ .$$

Comme $PP^{-1} \neq P$, on a $PP^{-1} = \mathcal{O}_K$. Or $\mathfrak{a}P^{-1} \neq \mathfrak{a}$. Par maximalité, $\mathfrak{a}P^{-1} = P_1....P_r$ pour certains idéaux premiers non nuls P_i. Mais alors :

$$\mathfrak{a} = PP_1...P_r \ .$$

Contradiction !

Unicité : Si $\mathfrak{a} = P_1...P_r = Q_1....Q_s$ pour certains idéaux premiers non nuls P_i, Q_j. Alors P_1 contient l'un des Q_j par exemple Q_1. Par maximalité, $P_1 = Q_1$ En multipliant par P_1^{-1}, on trouve : $P_2...P_r = Q_2....Q_s$. On conclut par récurrence. **Q.e.d.**

Cours du mardi 5 mai 2015

Exercice 5 *Soit A un anneau de Dedekind.*

a) Tout idéal I de A est inversible : $II^{-1} = A$ où $I^{-1} = \{x \in K : xI \leq A\}$.

b) Un anneau de Dedekind avec un nombre fini d'idéaux maximaux est principal (par exemple un anneau de Dedekind local).

c) Si I est un idéal non nul, alors A/I est principal.

d) Tout idéal peut être engendré par deux éléments.

Soit A un anneau de Dedekind (par ex. : $A = \mathbb{Z}$), soit K (par ex ; : $K = \mathbb{Q}$) le corps des fractions de A. Soit L/K une extension finie *séparable*, soit $B := \overline{A}^L$ la fermeture intégrale de A dans L *i.e.* B est l'anneau des éléments de L entiers sur A (par ex. : $B = \mathcal{O}_L$). Alors B est un anneau de Dedekind (exo)

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de A. Il existe $P_1, ..., P_g$ des idéaux premiers non nuls de B deux à deux distincts tels que $B\mathfrak{p} = P_1^{e_1}....P_g^{e_g}$ pour certains entiers $e_i \geq 1$, $g \geq 1$. Tout cela est uniquement déterminé.

Définition 7 *Les entiers e_i sont les indices de ramification de $\mathfrak{p}$ dans L. Si tous les e_i sont 1, on dit que $\mathfrak{p}$ est non ramifié dans L, si l'un des $e_i > 1$, on dit que $\mathfrak{p}$ est ramifié dans L.*

Exemple : si $A = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(i)$, $B = \mathbb{Z}[i]$, alors on a :

	e	f	g
$p = 2$	2	1	1
$p = 1 \bmod 4$	1	1	2
$p = -1 \bmod 4$	1	2	1

car $2\mathbb{Z}[i] = (1+i)^2$, si p est premier de la forme $1 \bmod 4$, $p\mathbb{Z}[i] = P_1P_2$ pour certains idéaux premiers distincts P_1, P_2 de $\mathbb{Z}[i]$, si p est premier de la forme $-1 \bmod 4$, $p\mathbb{Z}[i]$ reste premier. Donc 2 est le seul nombre premier qui se ramifie dans $\mathbb{Q}(i)$.

12.3 Égalité fondamentale

Théorème 12.6 *Si L/K est galoisienne, alors $e_1 = ... = e_g$. Autrement dit $B\mathfrak{p} = (P_1....P_g)^e$ pour un certain $e \geq 1$.*

Démonstration : Soit $G := \mathrm{Gal}(L/K)$. Le groupe G préserve B. De plus, G permute les P_i car ce sont les idéaux premiers non nuls de B qui contiennent $\mathfrak{p}$. Posons $P := P_1$. Soit $\mathscr{P} := \{\sigma(P) : \sigma \in G\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe un i tel que $P_i \notin \mathscr{P}$. D'après le théorème des restes chinois, $B/P_1....P_r \simeq \prod_j B/P_j$. Donc il existe $\alpha \in P$ tel que $\alpha = 0 \bmod P_i$ et $\alpha = 1 \bmod \sigma P$ pour tout $\sigma \in G$.

Soit $a := \prod_{\sigma\in G} \sigma\alpha = N_{L/K}(\alpha)$. On a $a \in A \cap P_i = \mathfrak{p} \leq P_1^{e_1}...P_g^{e_g}$. Donc $a \in P$ et il existe un des facteurs $\sigma\alpha$, $\sigma \in G$, tel que $\sigma\alpha \in P$. Mais alors $\alpha \in \sigma^{-1}P$ ce qui contredit $\alpha = 1 \bmod \sigma^{-1}P$ $(\forall\, \sigma \in G)$.

On dit que les P_i sont les idéaux conjugués de P.

Donc $B\mathfrak{p} = \sigma(P_1^{e_1}...P_g^{e_g}) = \sigma(P_1)^{e_1}....\sigma(P_g)^{e_g}$. Soit i, soit σ tel que $\sigma(P_1) = P_i$. On trouve : $e_1 = e_i$. **Q.e.d.**

Considérons le *corps résiduel* B/P_i. C'est une extension finie du corps fini $A/\mathfrak{p}$. Soit $f_i := [B/P_i : A/\mathfrak{p}]$.

Théorème 12.7 *Si L/K est galoisienne, tous les corps résiduels B/P_i ont le même degré $f = f_1 = ... = f_g$.*

Démonstration : Si $\sigma(P_1) = P_i$, alors σ induit un isomorphisme $B/P_1 \simeq B/P_i$. **Q.e.d.**

Théorème 12.8 (égalité fondamentale) *Soit $n = |G|$. Alors $B\mathfrak{p} = (P_1...P_g)^e$ et $n = efg$.*

Démonstration : Dans le cas où $A = \mathbb{Z}$:

Soit p le nombre premier > 0 tel que $\mathfrak{p} = (p)$.

$\mathcal{O}_L/(p) \simeq \prod_i \mathcal{O}_L/P_i^e$. Or $\mathcal{O}_L$ est un $\mathbb{Z}-$module libre de rang n. Donc $\mathcal{O}_L/(p) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ est de cardinal p^n. Pour tout j, P_i^j/P_i^{j+1} est un $\mathcal{O}_L/P_i-$espace vectoriel de dimension 1 : en effet, soit $x \in P_i^j \setminus P_i^{j+1}$ alors $(x) = \prod_{k\neq i} P_k^{r_k} P_i^{r_i}$ pour certains idéaux premiers non nuls deux à deux distincts et certains entiers r_k. Comme $(x) \leq P_i^j$, $r_i \geq j$ (si $r_i < j$, on multiplie par $P_i^{-r_i}$ et on trouve une contradiction). Comme $x \notin P_i^{j+1}$, $r_i = j$. Donc $x\mathcal{O}_L/P_i^{j+1} = P_i^j/P_i^{j+1}$ car si $P \neq P_i$, $P/P_i^{j+1} = \mathcal{O}_L/P_i^{j+1}$. On en déduit que $\mathcal{O}_L/P_i \to P_i^j/P_i^{j+1}$,$t \mapsto tx$ est surjectif. De plus, si $t \in \mathcal{O}_L$, $tx \in P_i^{j+1} \Rightarrow t \in P_i$ (en effet, si $t \notin P_i$, t est inversible dans $\mathcal{O}_L/P_i$ donc il existe $s \in \mathcal{O}_L$ tel que $st = 1 \bmod P_i$ mais alors d'une part, $stx \in P_i^{j+1}$ et d'autre part, $stx = x \bmod P_i^{j+1} \Rightarrow x \in P_i^{j+1}$ *absurde !*) donc on a un isomorphisme $\mathcal{O}_L/P_i \simeq P_i^j/P_i^{j+1}$.

Comme $\mathcal{O}_L/P_i^e \geq P_i/P_i^e \geq ... \geq P_i^{e-1}/P_i^e \geq 0$ et pour tout $j = 0$ à $e-1$,

$$P_i^j/P_i^e/P_i^{j+1}/P_i^e \simeq P_i^j/P_i^{j+1} \simeq \mathcal{O}_L/P_i\,,$$

on a $|\mathcal{O}_L/P_i^e| = \prod_{j=0}^{e-1} |\mathcal{O}_L/P_i| = p^{ef}$. Donc $p^n = p^{efg}$.

Cas général : Soient $S := A \setminus \mathfrak{p}$, $A' := S^{-1}A := \{a/s \,:\, a \in A,\, s \in S\}$, $B' := S^{-1}B := \{b/s \,:\, b \in B, s \in S\}$. Alors A' est principal, $\mathrm{Frac}(A') = K$ et $B' = \overline{A'}^L$ est un $A'-$module libre de rang $n = [L : K]$ (exo). On peut raisonner comme pour $\mathbb{Z}$: $B/B\mathfrak{p} \simeq B'/B'\mathfrak{p}$, $A'/\mathfrak{p}A' \simeq A/\mathfrak{p}$, $B'/B'\mathfrak{p}$ est un $A'/A'\mathfrak{p}-$espace vectoriel de rang n. De plus, dans l'anneau de Dedekind

B', on a la décomposition $B'\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^{g}(B'P_i)^{e_i}$ où les idéaux $B'P_i$ sont premiers, non nuls, deux à deux distincts. Donc $n = \sum_i e_i[B'/B'P_i : A'/A'\mathfrak{p}] = \sum_i e_i f_i = efg$. **Q.e.d.**

12.4 Discriminant

Définition 8 *Soient $A \leq B$ deux anneaux commutatifs tels que B est un $A-$module libre de rang n. Si $x_1, ..., x_n \in B$, on note $D_{B/A}(x_1, ..., x_n) := \text{dét}(\text{Tr}_{B/A}(x_i x_j))_{1\leq i,j\leq n}$. On note $\mathscr{D}_{B/A}$ l'idéal principal de A engendré par $D(x_1, ..., x_n)$ où $x_1, ..., x_n$ est une $A-$base de B.*

Si L/K est une extension finie séparable. On note $\Delta_{L/K}$ l'idéal de $\mathcal{O}_K$ engendré par les $D_{L/K}(x_1, ..., x_n)$ où $(x_1, ..., x_n)$ est une $K-$base de L contenue dans $\mathcal{O}_L$.

Exercice 6 *Si $A \leq B$ sont deux anneaux commutatifs tels que B est un $A-$module libre, si $x_1, ..., x_n$ et $x'_1, ..., x'_n$ sont deux bases du $A-$module B, alors :*

$$D_{B/A}(x'_1, ..., x'_n) = (\text{dét}P)^2 D_{B/A}(x_1, ..., x_n)$$

où P est la matrice de passage de la base des x_i dans la base des x'_i.

Proposition 12.9 *Si L/K est une extension séparable et si $\sigma_1, ..., \sigma_n$ sont les n $K-$plongements de L dans Ω une extension algébriquement close de L, alors pour toute base $x_1, ..., x_n$ de L/K, on a :*

$$D_{L/K}(x_1, ..., x_n) = \text{dét}(\sigma_i(x_j))^2_{i,j} \neq 0 \ .$$

Démonstration : Soit Q la matrice $(\sigma_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$. Pour tous i, j, on a $\text{Tr}_{L/K}(x_i x_j) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(x_i x_j) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(x_i)\sigma_k(x_j) = ({}^tQQ)_{i,j}$. **Q.e.d.**

Remarque : en particulier, si L/K est une extension finie séparable, la $K-$forme quadratique $L \to K,\ x \mapsto \text{Tr}_{L/K}(x^2)$ est non dégénérée.

Exemple : si $L = K[x]$ est une extension finie séparable de degré n, alors $D_{L/K}(1, ..., x^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} N_{L/K}(F'(x)) = \text{Disc}(F)$ où F est le polynôme minimal de x sur K.

Définition 9 (discriminant absolu) *Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie de degré n. On note $D_{K/\mathbb{Q}} := D(x_1, ..., x_n)$ où $x_1, ..., x_n$ est une $\mathbb{Z}-$base de $\mathcal{O}_K$.*

Exercice : c'est indépendant de la $\mathbb{Z}-$base choisie.

Exemple : si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où d est un entier $\neq 1$ sans facteur carré, alors :

d	$\mathcal{O}_K$	$D_{K/\mathbb{Q}}$
$1 \bmod 4$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{d}}{2}$	d
$2 \bmod 4$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{d}$	$4d$
$-1 \bmod 4$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{d}$	$4d$

En particulier, si $K/\mathbb{Q}$ est une extension quadratique où 2 est le seul nombre premier ramifié, alors $K = \mathbb{Q}(i)$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Théorème 12.10 (Hermite-Minkowski) *Si $K/\mathbb{Q}$ est une extension finie de degré > 1, alors $|D_{K/\mathbb{Q}}| > 1$.*

Démonstration : *cf. Pierre Samuel, Théorie algébrique des nombres, §4.3, th. 1* **Q.e.d.**

12.5 Discriminant et ramification

Lemme 12.11 *Soient A un anneau et $B_1, ..., B_r$ des anneaux contenant A qui sont des $A-$modules libres de rang fini. On note $B := \prod_{i=1}^{q} B_i$. Alors $\mathscr{D}_{B/A} = \prod_{i=1}^{r} \mathscr{D}_{B_i/A}$.*

Lemme 12.12 *Soient $A \leq B$ deux anneaux tels que B est un $A-$module libre ayant une base $x_1, ...x_n$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Si on note $\overline{x_i} := x_i \bmod \mathfrak{a}$, alors on a :*

$$D(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = D(x_1, ..., x_n) \bmod \mathfrak{a} \ .$$

Lemme 12.13 *Soient K un corps fini ou un corps de caractéristique nulle et L une $K-$algèbre de dimension finie. L'algèbre L/K est réduite si et seulement si $\mathscr{D}_{L/K} \neq 0$.*

Démonstration : Supposons L non réduite. Il existe $0 \neq x_1 \in L$ nilpotent. On complète en $x_1, ..., x_n$ une base de L/K. Pour tout j, la multiplication par $x_1 x_j$ est un endomorphisme nilpotent de L donc de trace nulle : la matrice $(\mathrm{Tr}(x_i x_j))_{i,j}$ a donc une première ligne nulle et son déterminant est 0. Réciproquement, supposons L réduite. Alors l'idéal (0) contient un produit fini d'idéaux premiers (éventuellement nuls !) : $(0) = P_1^{e_1} ... P_g^{e_g}$ où les P_i sont des idéaux premiers deux à deux distincts. Soit $x \in P_1 \cap ... \cap P_g$. On a $x^{e_1+...+e_g} \in P_1^{e_1} ... P_g^{e_g} \Rightarrow x^{e_1+...+e_g} = 0 \Rightarrow x = 0$ car L est réduite. Donc $0 = P_1 \cap ... \cap P_g$. Les L/P_i sont des $K-$algèbres de dimension finie intègres donc sont des corps et les P_i sont maximaux. On a donc $L = L/0 \simeq \prod_i L/P_i$. Donc $\mathscr{D}_{L/K} = \prod_i \mathscr{D}_{L_i/K} \neq 0$ (où $L_i := L/P_i$).

Q.e.d.

Théorème 12.14 *Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie. Le nombre premier $p \in \mathbb{Z}$ se ramifie dans $\mathcal{O}_K$ si et seulement si $p | D_{K/\mathbb{Q}}$.*

Démonstration : On a p qui se ramifie si et seulement si l'algèbre $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est non réduite *i.e.* $\mathscr{D}_{\mathcal{O}_K/p} = (D_{K/\mathbb{Q}} \bmod p) = 0$ *i.e.* $p | D_{K/\mathbb{Q}}$.

Q.e.d.

Corollaire 12.14.1 *Si $K/\mathbb{Q}$ est une extension finie où aucun nombre premier ne se ramifie alors $K = \mathbb{Q}$.*

Plus généralement, on a :

Théorème 12.15 *Soit A un anneau de Dedekind, soit K le corps des fractions de A. Soit L/K une extension finie séparable, soit $B := \overline{A}^L$ la fermeture intégrale de A dans L. Alors un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est ramifié dans L si et seulement si $\mathscr{D}_{B/A} \leq \mathfrak{p}$ (où $\mathscr{D}_{B/A}$ est l'idéal de A engendré par les $D_{L/K}(x_1, ..., x_n)$, $(x_1, ..., x_n)$ base de L comme $K-ev$ contenue dans B).*

Exercice 7 *Soient trois corps $K \leq K' \leq K"$ tels que $[K" : K]$ est finie. On a la formule de transitivité suivante :*

$$\mathscr{D}_{K"/K} = N_{K'/K}(\mathscr{D}_{K"/K'}).\mathscr{D}_{K'/K}^{[K":K']}$$

où pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ de $\mathcal{O}_{K'}$, on note $N_{K'/K}(\mathfrak{a}')$ l'idéal de $\mathcal{O}_K$ engendré par les $N_{K'/K}(a')$, $a' \in \mathfrak{a}'$.

Exercice 8 *Soient p un nombre premier et ζ une racine primitive $p-$ième de l'unité. On a :$D_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}} = \pm p^{p-2}$, l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta)$ est $\mathbb{Z}[\zeta]$ et p est le seul nombre premier p ramifié dans $\mathcal{O} := \mathbb{Z}[\zeta]$. L'idéal $(1-\zeta)$ est premier dans $\mathcal{O}$, c'est le seul idéal premier au-dessus de p et on a $p\mathcal{O} = (1-\zeta)^{p-1}$ et $\mathbb{Z}[\zeta]/(1-\zeta) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On a donc $e(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) = p-1$, $f(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) = 1$ et $g(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) = 1$.*

12.6 Groupes de décomposition et d'inertie

Soit L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G. Soit P un idéal premier de $\mathcal{O}_L$. On note $Z_P := \{s \in G \, : \, s(P) = P\}$.

Proposition 12.16 *$[G : Z_P] = g$ le nombre d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p} := P \cap \mathcal{O}_K$ et $|Z_P| = ef$.*

Définition 10 (groupe d'inertie) *Soient $k_L := \mathcal{O}_L/P$ et $k_K := \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. On note I_P le noyau du morphisme : $Z_P \to \mathrm{Gal}(k_L/k_K)$.*

Proposition 12.17 *Le morphisme : $Z_P \to \mathrm{Gal}(k_L/k_K)$ est surjectif. En particulier, $[Z_P : I_P] = f$ et $|I_P| = e$.*

Démonstration :

On suppose d'abord que $G = Z_P$. Soit $x \in \mathcal{O}_L$ tel que $k_L = k_K[\overline{x}]$ où $\overline{x} := x \bmod P$. Soit $s \in \mathrm{Gal}(k_K/k_L)$. Soit f le polynôme minimal de x sur K. Notons $x_1, ..., x_m$, $m \leq n$ ses racines. Notons $\overline{f} := (X - \overline{x_1})....(X - \overline{x_n}) \in k_K[X]$. On a $\overline{f}(\overline{x}) = 0 \Rightarrow \overline{f}(s(\overline{x})) = 0$. Donc il existe i tel que $s(\overline{x}) = \overline{x_i}$. Soit $\sigma \in G$ tel que $\sigma(x) = x_i$. On a bien $\overline{\sigma} = s$.

Cas général : Soit $K' := L^{Z_P}$. Soit $P' := P \cap \mathcal{O}_{K'}$. On a $P'\mathcal{O}_L = P^{e(L/K')}$... et $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{K'} = P'^{e'}$... pour un certain $e' \geq 1$. Comme $\mathcal{O}_K \leq \mathcal{O}_{K'} \leq \mathcal{O}_L$, $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = P^{e(L/K)}$... avec $e(L/K) = e'e(L/K') \geq e(L/K')$.

On a aussi :

$$k_K \leq \mathcal{O}_{K'}/P' \leq \mathcal{O}_L/P$$

donc $[k_L : k_K] = f(L/K) = [\mathcal{O}_L/P : \mathcal{O}_{K'}/P'][\mathcal{O}_{K'}/P' : k_K] \geq f(L/K')$.

Or si on considère l'extension galoisienne L/K', comme $\mathrm{Gal}(L/K') = Z_P$, on a $g(L/K') = 1$. D'où :

$$[L : K'] = e(L/K')f(L/K') = |Z_P| = [L : K]/g(L/K) = e(L/K)f(L/K) \ .$$

Comme $e(L/K') \leq e(L/K)$ et $f(L/K') \leq f(L/K)$, on a forcément $e(L/K') = e(L/K)$ et $f(L/K') = f(L/K)$. En particulier $\mathcal{O}_{K'}/P' = \mathbb{F}_p$. Donc on peut raisonner avec L/K' à la place de L/K et dans ce cas, $\mathrm{Gal}(L/K') = Z_P$. **Q.e.d.**

En déduire :

Exercice 9 *Soit K/F une extension galoisienne de corps de nombres. Soit P un idéal premier de $\mathcal{O}_K$, soit $I := I_P$ et $K_I := K^I$. Alors $f(K/K_I) = 1$ et $g(K/K_I) = 1$; si $\mathfrak{p} := P \cap \mathcal{O}_F$, alors $\mathfrak{p}$ est non ramifié dans K_I et K_I contient toutes les extensions $F \leq K' \leq K$ où $\mathfrak{p}$ est non ramifié. En particulier, si $F \leq F', F'' \leq K$, si $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$ est non ramifié dans F' et dans F", $\mathfrak{p}$ est non ramifié dans le compositum $F'F''$ (indication : en utilisant la première partie : soit M/F une extension galoisienne contenant F, F', soit I le groupe d'inertie d'un idéal premier au-dessus de $\mathfrak{p}$, alors $F, F' \leq M^I \Rightarrow FF' \leq M^I$!).*

12.7 Théorème de Kronecker-Weber

Pour tout $n > 1$, on pose $\zeta_n := e^{2i\pi/n}$.

Nous allons démontrer :

Théorème 12.18 (de Kronecker-Weber) *Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne finie de groupe de Galois abélien. Alors il existe n tel que $K \leq \mathbb{Q}(\zeta_n)$.*

Puisque tout groupe abélien fini est produit de groupes cycliques, il suffit de traiter le cas où $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est cyclique d'ordre une puissance d'un nombre premier !

En effet, si $K/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne de groupe $G_1 \times G_2$, si on pose $K_i := K^{G_i}$, alors $K_1/\mathbb{Q}$ (*resp.*$K_2/\mathbb{Q}$) est galoisienne de groupe de Galois $\simeq G_2$ (*resp.*G_1) et $K = K_1K_2$ car $\mathrm{Gal}(K/K_1K_2) = \mathrm{Gal}(K/K_1) \cap \mathrm{Gal}(K/K_2) = G_1 \times 1 \cap 1 \times G_2 = 1$.

Lemme 12.19 *Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie abélienne. Soit p un nombre premier* **qui ne divise pas** *$[K : \mathbb{Q}]$. Soit I le groupe d'inertie d'un idéal premier P au-dessus de p dans K. Alors, I est cyclique d'ordre qui divise $p-1$.*

Démonstration : Soit D le groupe de décompositionde P au-dessus de $\mathbb{Q}$. Soit $k_K := \mathcal{O}_K/P$ le corps résiduel. Soit $\pi \in P \setminus P^2$. Si $\sigma \in D$, on note $\overline{\sigma} \in \mathrm{Gal}(k_K/\mathbb{F}_p)$ l'automorphisme induit sur k_K. Considérons l'application :

$$f : D \to k_K^\times$$

définie par $f(\sigma) := \sigma(\pi)/\pi \bmod P$ pour un certain élément $\pi \in P \setminus P^2$ fixé. On vérifie que :

$$\forall\, \sigma,\, \tau \in D,\, f(\sigma\tau) = f(\sigma)\overline{\sigma}(f(\tau)) \ .$$

En particulier, $f|_I$ est un morphisme de groupes. Soit $\sigma \in \ker(f|_I)$. Soit m l'ordre de σ. Alors $p \nmid m$. De plus $\sigma(\pi) = \pi \bmod P^2$. supposons que $\sigma(\pi) = \pi + a\pi^k \bmod P^{k+1}$ pour un certain $a \in \mathcal{O}_K$ et un $k \geq 2$. Comme $\mathcal{O}_{K^I}/(P \cap \mathcal{O}_{K^I}) \simeq \mathcal{O}_K/P$ (exo), on peut supposer que a est fixé par I. On a :

$$\pi = \sigma^m(\pi) = \pi + a(\pi^k + ... + \sigma^{m-1}(\pi)^k) \bmod P^{k+1} \ .$$

Or, $\forall\, k$, $\sigma(\pi)^k = \pi^k \bmod P^{k+1}$. Donc $\pi = \pi + am\pi^k \bmod P^{k+1}$. D'où, $a = 0 \bmod P$. On a donc montré que $\sigma(\pi) - \pi \in \bigcap_{k\geq 2} \pi^k = 0$. Donc $\sigma(\pi) = \pi$. On en déduit que $\sigma = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{O}_K$ et donc sur K (en effet, pour tout $x \in \mathcal{O}_K$, pour tout $n \geq 0$, il existe $a_0, ..., a_n \in \mathcal{O}_{K^I}$ tels que $x = a_0 + a_1\pi + ... + a_n\pi^n \bmod P^{n+1}$; donc $\sigma(x) - x \in \bigcap_n P^n = 0$).

ainsi $f|_I$ est injective. Pour terminer, il suffit de montrer que $f(I) \leq \mathbb{F}_p^\times$. OR, si $\sigma \in I$ et $\tau \in D$, comme D est abélien, $f(\sigma\tau) = f(\tau\sigma) = f(\tau)\overline{\tau}(f(\sigma)) \Rightarrow f(\sigma)f(\tau) = f(\tau)\overline{\tau}(f(\sigma)) \Rightarrow f(\sigma) = \overline{\tau}(f(\sigma))$. Donc $f(\sigma)$ est fixé par tous les éléments de $\mathrm{Gal}(k_K/\mathbb{F}_p)$. **Q.e.d.**

Corollaire 12.19.1 *Si $K/\mathbb{Q}$ est une extension finie abélienne de degré impair, alors 2 n'est pas ramifié dans K.*

Lemme 12.20 *Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie cyclique de degré l^r où l est un nombre premier. Il existe $K'/\mathbb{Q}$ une autre extension finie cyclique de degré une puissance de l telle que l est le seul nombre premier ramifié dans $K'/\mathbb{Q}$ et telle que :*

K est inclus dans un corps cyclotomique si et seulement si K' l'est aussi.

Démonstration : Supposons que $p \neq l$ est un nombre ramifié dans K. Alors si $l \neq 2$, p est impair d'après le corollaire précédent. Soit l^a la plus grande puissance de l divisant $p-1$.Soit F le sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ de degré

l^a sur $\mathbb{Q}$.Soit $E := FK$. Soit K_I le corps d'inertie de $E/\mathbb{Q}$ pour p (pour un idéal premier P de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de p, $K_I := E^{I_P}$). Alors $E = FK_I$, donc K est inclus dans un corps cyclotomique si et seulement si K_I l'est aussi. De plus, p n'est plus ramifié dans K_I et un nombre premier non ramifié dans K reste non ramifié dans K_I ... en un nombre fini d'étapes on arrive donc à un K' comme dans l'énoncé à partir de K. **Q.e.d.**

Il reste donc à démontrer :

Théorème 12.21 *Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie cyclique de degré l^r pour un nombre premier l et un $r \geq 1$. On suppose que l est le seul nombre premier ramifié dans K. Alors K est contenu dans un corps cyclotomique.*

Démonstration : On distingue les cas :

si $l = 2$

Supposons que $K/\mathbb{Q}$ est une extension cyclique dedegré 2^r pour un certain $r \geq 1$ et que 2 est le seul nombre premier ramifié dans K. Comme $K/\mathbb{Q}$ est cyclique, K contient une seule extension quadratique de degré 2 (où 2 est le seul nombre premir ramifié). Donc $\mathbb{Q}(i)$ ou $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \not\leq K$. Par exemple si $i \notin K$, considérons $K_1 := K(i) \cap \mathbb{R}$ qui est de degré 2^r sur $\mathbb{Q}$. Soit $F := \mathbb{Q}(\zeta_{2^{r+2}}) \cap \mathbb{R}$. On a aussi $[F : \mathbb{Q}] = 2^r$. Considérons le corps $E := FK_1$. Alors K est inclus dans un corps cyclotomique $\Leftrightarrow$ K_1 l'est $\Leftrightarrow$ E l'est. Si $E/\mathbb{Q}$ est cyclique, alors E contient une unique extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2^r donc $F = K_1$ est contenu dans une extension cyclotomique et K aussi ! Si $E/\mathbb{Q}$ n'est pas cyclique, alors E contient une extensionde $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois $\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En particulier, E contient au moins deux extensions quadratiques réelles où 2 est le seul nombre premier ramifié. Or $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est la seule extension de la sorte !

Q.e.d.

si l impair

Q.e.d.

Lemme 12.22 *Soit p un nombre premier impair. Il existe une unique extension cyclique $K/\mathbb{Q}$ de degré p où p est le seul nombre premier ramifié (*i.e. *dont le discriminant est une puissance de p). Il s'agit de l'unique sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})$ de degré p sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration : *Existence :* exo !

Unicité : soit K' comme dans l'énoncé. Soit K l'unique sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})$ de degré p sur $\mathbb{Q}$. Soit $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ où $\zeta := \zeta_p \neq 1$ est une racine $p-$ième

de l'unité. IL est clair que $KL = \mathbb{Q}(\zeta_{p^2})$.D'après le théorème de Kummer 9.2, $K'L = L(\sqrt[p]{\alpha})$ pour un $\alpha \in L$. On peut supposer que $\alpha \in \mathcal{O}_L$ (en effet, $n\alpha \in \mathcal{O}_L$ pour un certain entier $n > 0$ et donc $n^p\alpha \in \mathcal{O}_L$ convient aussi. Soit $\lambda := 1 - \zeta \in L$. On a $N_{L/\mathbb{Q}}(\lambda) = p$ donc (λ) est l'unique idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de p. On va montrer que l'on peut choisir $\alpha = 1 \bmod \lambda^p$ dans $\mathcal{O}_L$. En effet, soit τ un générateur de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ qu'on prolonge à $K'L$. Soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(K'L/L) \simeq \mathrm{Gal}(K'/(K' \cap L)) = \mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q})$ si on suppose $K' \neq Q$. Comme $\mathrm{Gal}(K'L/\mathbb{Q})$ est abélien (exo), $\sigma(\tau(\sqrt[p]{\alpha})) = \tau(\sigma(\sqrt[p]{\alpha})) = \tau(\zeta\sqrt[p]{\alpha}) = \zeta^l\tau(\sqrt[p]{\alpha})$ pour un certain l générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Donc $\tau(\sqrt[p]{\alpha})$ est un vecteur propre de σ associé à la valeur propre ζ^l. Or $\sigma(\sqrt[p]{\alpha}) = \zeta\sqrt[p]{\alpha}$ donc $\sigma(\sqrt[p]{\alpha^l}) = \zeta^l\sqrt[p]{\alpha}$ et $\sqrt[p]{\alpha^l}$ est aussi un vecteur propre associé à ζ^l. Donc $\tau(\sqrt[p]{\alpha}) = c\sqrt[p]{\alpha}$ pour un $c \in L$. Mais alors : $\tau(\alpha) = c^p\alpha^l$. Donc $\tau(\alpha)/\alpha \in \mathcal{O}_L$. On a donc $L(\sqrt[p]{\tau(\alpha)/\alpha}) = L(\sqrt[p]{\alpha^{l-1}}) \leq L(\sqrt[p]{\alpha})$. Comme $\sqrt[p]{\alpha^{l-1}} \notin L$ (car $\sigma(\sqrt[p]{\alpha^{l-1}}) = \zeta^{l-1}\sqrt[p]{\alpha^{l-1}}$ et $\zeta^{l-1} \neq 1 \Leftrightarrow l - 1 \neq 0 \bmod p \Leftrightarrow l \neq 1 \bmod p$. Comme l'idéal (λ) est stable par τ, on voit que $\tau(\alpha)/\alpha$ est premier à p. Quitte à remplacer α par $\tau(\alpha)/\alpha$ on peut donc supposer α premier à p. Quitte à remplacer α par α^{p-1}, on peut supposer que $\alpha = 1 \bmod \lambda$ (en effet : $|(\mathcal{O}_L/\lambda)^\times| = p - 1$). Puisque $\mathcal{O}_L/(\lambda) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\alpha = 1 + a\lambda \bmod \lambda^2$ pour un certain entier a. Or, $\zeta^a = 1 - a\lambda \bmod \lambda^2$ (exo). Donc en remplaçant α par $\zeta^a\alpha$, on obtient un $\alpha' := \zeta^a\alpha = 1 \bmod \lambda^2$ dans $\mathcal{O}_L$. Supposons que $\alpha' = 1 + a\lambda^e \bmod \lambda^{e+1}$ pour un $2 \leq e < p$.Comme $L(\sqrt[p]{\alpha'}) \leq KK'L$ et comme $KK'L/\mathbb{Q}$ est abélienne, $L(\sqrt[p]{\alpha'})/\mathbb{Q}$ aussi. Donc comme précédemment, on peut trouver un $c \in L$ tel que $\tau(\alpha') = c^p\alpha'^l = c^p \bmod \lambda^2$ pour un certain l générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Or, $\tau(\lambda) = 1 - \zeta^l = \lambda(1 + ... + \zeta^{l-1}) = l\lambda \bmod \lambda^2$. Donc $\tau(\alpha') = 1 + a(l\lambda)^e \bmod \lambda^{e+1} = c^p \bmod \lambda^2 \Rightarrow c^p = 1 \bmod \lambda$. Mais $c^p = c \bmod \lambda$ car $\mathcal{O}_L/\lambda \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc $c = 1 \bmod \lambda \Rightarrow c^p = 1 \bmod p$ ($(1 + t\lambda)^p = 1 \bmod p$. Par conséquent :

$$1 + a(l\lambda)^e = \tau(\alpha') = \alpha'^l = 1 + al\lambda^e \bmod \lambda^{e+1}$$

d'où : $a = 0$ ou $l^e = l \Rightarrow p - 1|e - 1$ absurde ! Ainsi $\alpha' = 1 \bmod \lambda^{e+1}$. On peut recommencer ... finalement, on trouve $\alpha' = 1 \bmod \lambda^p$.

On va en déduire que $K' = K$. Sinon : posons $\xi := \frac{1-\sqrt[p]{\alpha'}}{\lambda} \in KK'L$. C'est une racine du polynôme $f(X) = (X - 1/\lambda)^p - \alpha/\lambda^p$. D'après ce qui précède, $f(X)$ est un polynôme unitaire dans $\mathcal{O}_L[X]$. Donc ξ est entier (sur $\mathbb{Z}$). Le discriminant de l'extension $KK'L/KL$ contient l'idéal engendré par $N_{KK'L/KL}(f'(\xi)) = N_{KL}(p(\xi - 1/\lambda)^{p-1}) = \epsilon\alpha'^{p-1}$ où ϵ est une unité. Mais alors, c'est premier à p. Donc l'idéal premier de $\mathcal{O}_{KL}$ au-dessus de p est non ramifié ! Mais alors le groupe d'inertie I d'un idéal premier de $\mathcal{O}_{KK'L}$ au-dessus de p est d'ordre $< [KK'L : \mathbb{Q}] = p(p^2 - p)$. Soit $T := (KK'L)^I$ le corps des invariants. Le nombre premier p n'est pas ramifié dans T et aucun autre nombre premier ne peut l'être car aucun autre n'est ramifié ni dans K, ni dans K' ni dans L. Donc $T = \mathbb{Q}$ absurde ! **Q.e.d.**

Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension cyclique de degré l^r où l est premier et l est le seul premier ramifié dans K. Soit F le sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{l^{r+1}})$ de degré l^r sur $\mathbb{Q}$. Soit $E := FK$. L'extension $E/\mathbb{Q}$ est cyclique $\Leftrightarrow F = K$ (car $\mathrm{Gal}(FK/K) \simeq \mathrm{Gal}(F/(K \cap F))$ est de même ordre que $\mathrm{Gal}(FK/F) \simeq \mathrm{Gal}(K/(K \cap F))$: $l^r/[K \cap F : \mathbb{Q}]$; donc si $\mathrm{Gal}(FK/\mathbb{Q})$ ce groupe ne contient qu'un seul sous-groupe d'un ordre donné et $\mathrm{Gal}(FK/K) = \mathrm{Gal}(FK/F)$ d'où en prenant les invariants : $F = K$). Si $E/\mathbb{Q}$ n'est pas cyclique, il existe un quotient de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (exo) *i.e.* un corps $\mathbb{Q} \leq D \leq E$ tel que $\mathrm{Gal}(D/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Clairement l est le seul nombre premier ramifié dans D' si $\mathbb{Q} < D' < D$ avec $[D' : \mathbb{Q}] = p$. D'après le lemme précédent, il existe un unique D' tel que : $\mathbb{Q} < D' < D$ et $[D' : \mathbb{Q}] = p$. Donc il existe un unique sous-groupe d'ordre p dans $\mathrm{Gal}(D/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *absurdo !*
Q.e.d.

Fin du cours 2015

12.8 Application : le polynôme $X^n - X - 1$

Soit $P := X^n - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. C'est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ (*cf.* TD) avec des racines $x_1, ..., x_n$. On note $K \subseteq \mathbb{C}$ le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 12.23 *On a* $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P) = \mathfrak{S}_n$.

Lemme 12.24 *Soit p un nombre premier et I_P le groupe d'inertie d'un idéal $P \leq \mathcal{O}_K$ au-dessus de P. Alors I_P est soit trivial soit engendré par une transposition.*

Démonstration : On note $\overline{P}$ la réduction de $P \mod p$.
Dans $\mathbb{F}_p[X]$, on a :

$$X\overline{P} - \overline{P} = (n-1)X + n \ .$$

Comme p ne divise pas en même temps n et $n-1$, on en déduit que le pgcd de $\overline{P}$ et $\overline{P}$ est de degré ≤ 1. Donc $\overline{P}$ est soit séparable soit avec une seule racine double et $n-2$ racines simples dans $\mathcal{O}_K/P$.

Soit $e \neq s \in I_P$. Il existe $i \neq j$ tel que $s(x_i) = x_j$. Alors $s(\overline{x_i}) = \overline{x_j} = \overline{x_i}$ car $s \in I_P$. Donc $\overline{x_i} = \overline{x_j}$ est l'unique racine double de $\overline{P}$. De plus si $\overline{x_k} \neq \overline{x_i}$, $s(\overline{x_k}) = \overline{x_k}$. Donc $s = (ij)$. **Q.e.d.**

Lemme 12.25 *Le groupe $G := \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$ est engendré par les groupes d'inertie I_P, $P \leq \mathcal{O}_K$ idéal premier.*

Démonstration : Soit H le sous-groupe de G engendré par les I_P où P décrit les idéaux maximaux de $\mathcal{O}_K$. C'est un sous-groupe distingué de G. En effet, si p est un nombre premier, l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de p est stable par l'action de G. Si $\sigma \in G$, $I_{\sigma(P)} = \sigma I_P \sigma^{-1}$.

Soit $k := K^H$. Nous allons montrer que $k = \mathbb{Q}$. Si $k \neq \mathbb{Q}$, d'après le théorème d'Hermite-Minkowski, il existe un nombre premier p qui se ramifie dans $\mathcal{O}_k$. Soit P' un idéal maximal de $\mathcal{O}_k$ tel que $P' \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Soit P un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ tel que $P \cap \mathcal{O}_k = P'$. Soit $\sigma \in I_{P'} \leq \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$. Soit $\sigma_1 \in G$ tel que $\sigma_1|_k = \sigma$. On peut supposer que $\sigma_1(P) = P$ en effet, il existe $t \in \mathrm{Gal}(K : k)$ tel que $t\sigma_1(P) = P$ (*cf.* la démonstration du théorème 12.6 en l'adaptant à K/k au lieu de $K/\mathbb{Q}$) et on peut ramplacer σ_1 par $t\sigma_1$. On peut aussi supposer que $\sigma_1 \in I_P$ en effet, il existe $t \in \mathrm{Gal}(K/k)$ tel que $\bar{t} : \mathcal{O}_K/P \to \mathcal{O}_K/P$ coïncide avec $\overline{\sigma_1} : \mathcal{O}_K/P \to \mathcal{O}_K/P$ et on peut remplacer σ_1 par $t^{-1}\sigma_1$. Mais alors $\sigma_1 \in H$ et $\sigma = \sigma_1|_k$ est trivial. Donc $|I_{P'}| = 1$ et p n'est pas ramifié ! **Q.e.d.**

Lemme 12.26 *Soit $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ un sous-groupe transitif engendré par des transpositions. Alors $G = \mathfrak{S}_n$.*

Démonstration : Soit T l'ensemble des transpositions de G. Soient $1 \leq a \neq b \leq n$. On va montrer que $(ab) \in G$. On choisit $s \in G$ tel que $s(a) = b$. On écrit $s = t_1...t_p$ avec $t_i \in T$. On choisit $s \in G$ tel que $s(a) = b$ et p est minimal.

On a b dans le support de t_1. Sinon $t_2...t_p(a) = t_1(b) = b$ ce qui contredit la minimalité de p. On a aussi :

$$s = t_j t'_1 ... t'_{j-1} t_{j+1} ... t_p$$

où $t'_k := t_j t_k t_j^{-1}$. On en déduit que b est dans le support de t_j pour tout j et donc de t_p. De même, on montre que a est dans le support de t_p. Donc $t_p = (ab) \in G$ car t_p est une transposition. **Q.e.d.**

Sections non traitées en cours :

13 Cohomologie galoisienne

13.1 $G-$modules

Soit G un groupe fini. Un $G-$*module* est un groupe abélien A sur lequel G opère et tel que :

(i) $1a = a$;

(ii) $s(a+b) = sa + sb$;

(iii) $(st)a = s(ta)$;

pour tous $a, b \in A$, $s, t \in G$.

Si A, B sont des $G-$modules, on dit qu'une application $f : A \to B$ est un $G-$morphisme si $\forall\, g \in G$, $\forall\, a \in A$, $f(ga) = gf(a)$.

Remarque : si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte, alors la suite $0 \to A^G \to B^G \to C^G$ est exacte.

13.2 Groupes de cohomologie

13.2.1 En degré 1

On note $Z^1(G, A) := \{f : G \to A \ : \ \forall\, s, t \in G,\ f(st) = f(s) + sf(t)\}$.

Si $a \in A$, on note : $f_a : G \to A$, $g \mapsto ga - a$ et $B^1(G, A) := \{f_a \ : \ a \in A\}$.

On pose ensuite : $H^1(G, A) := Z^1(G, A)/B^1(G, A)$.

Exercice : soient G un groupe cyclique et A un $G-$module. Soit s un générateur de G. On pose :

$$N_G : A \to A, \ , a \mapsto \sum_{i=0}^{|G|-1} s^i a \ .$$

Montrer que $H^1(G, A) \simeq \ker N_G/(s-1)(A)$ (*indication : si* $N_G x = 1$, *considérer le* $1-$*cocycle :* $z_x : s^i \mapsto (1 + ... + s^{i-1})(x)$.)

Théorème 13.1 (90 de Hilbert) *Soit L/K une extension galoisienne. On a :*

$$H^1(G(L/K), L^\times) = 1$$

où $G(L/K) = \mathrm{Gal}(L/K)$.

Démonstration : Soit $f \in Z^1(G(L/K), L^\times)$. D'après le théorème d'indépendance des caractères, il existe un $x \in L$ tel que $y := \sum_{g \in G} f(g)^g x \neq 0$. Alors $f = f_{y^{-1}}$. **Q.e.d.**

Corollaire 13.1.1 *On retrouve le théorème* 90 *de Hilbert si L/K est cyclique.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème et l'exercice ci-dessus. **Q.e.d.**

Soit $f : A \to B$ un morphisme de $G-$modules. Si $c \in Z^1(G, A)$, alors $f \circ c \in Z^1(G, B)$. De même, si $b \in B^1(G, A)$, alors $b \circ c \in B^1(G, B)$. On en déduit un morphisme : $H^1(f)) \to H^1(G, B) : c \bmod B^1(G, A) \mapsto f \circ c \bmod B^1(G, B)$.

Proposition 13.2 *Si $0 \to A \stackrel{i}{\to} B \stackrel{j}{\to} C \to 0$ est une suite exacte*, alors il existe un morphisme $\delta : C^G \to H^1(G, A)$ telle que la suite $0 \to A^G \stackrel{i}{\to} B^G \stackrel{j}{\to} C^G \stackrel{\delta}{\to} H^1(G, A) \stackrel{H^1(i)}{\to} H^1(G, B) \stackrel{H^1(j)}{\to} H^1(G, A)$ est exacte.*

Démonstration : On définit δ : soit $c \in C^G$. Il existe $b \in B$ tel que $c = j(b)$. Alors, $\forall\, s \in G$, $j(sb - b) = sc - c = 0$. Donc il existe $a \in A$ tel que $sb - b = i(a)$. On pose $f : G \to A$, $s \mapsto sb - b$ et $\delta(c) := f \bmod B^1(G, A)$. **Q.e.d.**

13.2.2 En tout degré

Si $n \geq 0$, on pose :

$$C^n(G, A) := \{f : G^n \to A\}$$

c'est un groupe abélien (addition point par point) qu'on appelle le groupe des $n-$*cocycles*. Si $n < 0$, on pose $C^n(G, A) := 0$.

Définition 11 *Soit $n \geq 0$. Soit $f \in C^n(G, A)$. Pour tous $g_1, ..., g_{n+1} \in G$, on pose :*

$$d^n(f)(g_1, ..., g_{n+1}) :=$$

$$g_1 f(g_2, ..., g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, ..., g_i g_{i+1}, ..., g_{n+1} + (-1)^{n+1} f(g_1, ..., g_n) \ .$$

On obtient un morphisme $d^n : C^n(G, A) \to C^{n+1}(G, A)$ pour tout n (si $n < 0$, $d^n = 0$).

Proposition 13.3 *Pour tout n, $d^n d^{n-1} = 0$.*

$*$. *i.e.* i est injective, $\operatorname{im} i = \ker j$ et j est surjective.

Démonstration : Posons $\partial^i f(g_1,...,g_{n+1}) := \begin{cases} g_1 f(g_2,...,g_{n+1}) & \text{si } i=0\,; \\ f(g_1,...,g_i g_{i+1},...g_{n+1}) & \text{si } 1\leq i\leq n\,; \\ f(g_1,...,g_n) & \text{si } i=n+1\,; \end{cases}$.

On a alors :

$$d^n d^{n-1} f(g_1,...,g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \partial^i d^{n-1} f(g_1,...,g_{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\partial^i\partial^j f(g_1,...,g_{n+1}) \ .$$

Or, si $j<i$, on a : $\partial^i\partial^j = \partial^j\partial^{i-1}$. Donc :

$$d^n d^{n-1} f(g_1,...,g_{n+1}) = \sum_{\substack{0\leq i\leq n+1\\ 0\leq j\leq n\\ j<i}} (-1)^{i+j}\partial^i\partial^j + \sum_{\substack{0\leq i\leq n+1\\ 0\leq j\leq n\\ i\leq j}} (-1)^{i+j}\partial^i\partial^j$$

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n+1\\ 0\leq j\leq n\\ j<i}} (-1)^{i+j}\partial^j\partial^{i-1} + \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n\\ i\leq j}} (-1)^{i+j}\partial^i\partial^j$$

$$\sum_{\substack{0\leq i'\leq n\\ 0\leq j'\leq n\\ i'\leq j'}} (-1)^{i'+j'-1}\partial^{i'}\partial^{j'} + \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n\\ i\leq j}} (-1)^{i+j}\partial^i\partial^j$$

$$= 0 \ .$$

Q.e.d.

Définition 12 (cocycles, cobords et cohomologie) *Le groupe* $Z^n(G,A) := \ker d^n$ *est le groupe des* $n-$*cocycles et* $B^n(G,A) := \text{im}\,(d^{n-1})$ *celui des* $n-$*cobords. Le groupe* $H^n(G,A) := Z^n(G,A)/B^n(G,A)$ *est le* $n-$*ième groupe de cohomologie.*

Exercice : $H^0(G,A) = A^G$ et on retrouve la définition de $H^1(G,A)$ précédente.

Soit $f : A \to B$ un morphisme de $G-$modules. Le morphisme f induit des morphismes $f^n : C^n(G,A) \to C^n(G,B)$ qui « commutent aux d^n » . en particulier on obtient des morphismes $H^n(f) : H^n(G,A) \to H^n(G,B)$.

Proposition 13.4 (suite exacte longue de cohomologie) *Soit* $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ *une suite exacte de* $G-$*modules. On a une suite exacte :*

$$0 \to H^0(G,A) \overset{H^0(i)}{\to} H^0(G;B) \overset{H^0(j)}{\to} H^0(G,C) \overset{\delta^0}{\to} H^1(G,A) \overset{H^1(i)}{\to} H^1(G,B) \to ...$$

$$\to H^n(G,A) \overset{H^n(i)}{\to} H^n(G;B) \overset{H^n(j)}{\to} H^n(G,C) \overset{\delta^n}{\to} H^{n+1}(G,A) \to ...$$

14 Théorie de Kummer

L'objectif est de généraliser la bijection suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{extensions } \mathbb{Q} \leq K \leq \overline{\mathbb{Q}} \\ [K:\mathbb{Q}] \leq 2 \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \\ d \in \mathbb{Z} \text{ sans facteur carré} \end{array} \longmapsto d \bmod (\mathbb{Q}^\times)^2.$$

Soit K un corps contenant le groupe μ_n des racines $n-$ièmes de l'unité. On suppose que la caractéristique de K est nulle ou première à n. Soit $(K^\times)^n \leq C \leq K^\times$ un sous-groupe tel que $C/(K^\times)^n$ soit fini. Pour tout $c \in K^\times$, l'extension $K(c^{1/n})/K$ est cyclique d'ordre un diviseur de n (*cf.* le théorème de Kummer 9.2). On pose $L := K(C^{1/n})$ le corps engendré par les $K(c^{1/n})$ (dans une certaine extension algébriquement close Ω de K fixée). On a un morphisme injectif de groupes :

$$G_C := \mathrm{Gal}(L/K) \to \prod_{c \in C/(K^\times)^n} \mathrm{Gal}(K(c^{1/n})/K) \ .$$

En particulier, l'extension L/K est abélienne.

Proposition 14.1 *L'application :*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : G_C \times C/(K^\times)^n \to \mu_n \, (s, c) \mapsto \langle s, c \rangle := s(c^{1/n})/c^{1/n}$$

est bimultiplicative et non dégénérée i.e. *induit des isomorphismes :*

$$G_C \to \mathrm{Hom}((C/(K^\times)^n, \mu_n)$$

$$C/(K^\times)^n \to \mathrm{Hom}(G_C, \mu_n) \ .$$

Démonstration :

Soit $G := \mathrm{Gal}(L/K)$. Soit $C = (L^\times)^n \cap K^\times$. La suite exacte courte $1 \to \mu_n \to L^\times \to (L^\times)^n \to 1$ induit une suite exacte :

$$1 \to \mu_n \to (L^\times)^G \cap K^\times \to (L^\times)^{nG} = C \to H^1(G, \mu_n) = \mathrm{Hom}(G, \mu_n) \to H^1(G, L^\times) = 1.$$

Q.e.d.

Lemme 14.2 *Soit L/K une extension abélienne d'exposant un diviseur de n. Il existe $c_1, ..., c_l \in K^\times$ tel que L soit le corps de décomposition du polynôme :*

$$(X^n - c_1)...(X^n - c_l) \ .$$

Démonstration : On raisonne par récurrence sur le degré $[L : K]$. Soit $G := \mathrm{Gal}(L/K)$. Si G est cyclique on applique le théorème de Kummer 9.2. Sinon, il existe $H_1, H_2 < G$ tels que $G = H_1H_2 \simeq H_1 \times H_2$. Alors $L = L_1L_2$ avec $L_i := L^{H_i}$. On applique l'hypothèse de récurrence à L_1/K et L_2/K. **Q.e.d.**

Corollaire 14.2.1 *Soit K un corps contenant le groupe μ_n des racines $n-$ièmes de l'unité. On suppose que la caractéristique de K est nulle ou première à n. On a deux bijections réciproques l'une de l'autre :*

$$\begin{array}{ccc} L^n \cap K^\times & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Sous-groupes } (K^\times)^n \leq C \leq K^\times \\ \textit{tels que } C/(K^\times)^n \textit{ est fini} \end{array} \right\} & C \\ \Psi \uparrow & \Psi \uparrow \downarrow \Phi & \downarrow \Phi \\ L & \left\{ \begin{array}{c} \textit{extensions abéliennes finies} \\ \textit{d'exposant un diviseur de } n \end{array} \right\} & K(C^{1/n}) \end{array}$$

15 Extensions d'Artin-Schreier

15.1 Forme additive du théorème 90 de Hilbert

Soit L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G.

Théorème 15.1 $H^n(G, L) = \left\{ \begin{array}{ll} L^G = K & \textit{si } n = 0\,; \\ 0 \textit{ si } n > 0. & \end{array} \right.$

Démonstration : Montrons que $H^1(G, L) = 0$. Soit $a \in L$ tel que $\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = 1$. Soit $f \in Z^1(G, L)$. On pose $b := \sum_{g\in G} f(g)^g a \in L$. Pour tout $\sigma \in G$, ${}^\sigma b = b - f(\sigma)$. **Q.e.d.**

Corollaire 15.1.1 *Si L/K est cyclique et si σ est un générateur de $\mathrm{Gal}(L/K)$, alors si $x \in L$, on a :*

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = 0 \Leftrightarrow {}^\exists\, y \in L,\ x = {}^\sigma y - y\ .$$

Démonstration : L'application $\mathrm{Gal}(L/K) \to L$, $\sigma^i \mapsto (1+...+\sigma^{i-1})(x)$ est un $1-$cocycle. **Q.e.d.**

15.2 Théorie des extensions d'exposant p en caractéristique p

Soit K un corps de caractéristique p.

Lemme 15.2 *Si $c \in K$, alors le polynôme $X^p - X - c \in K[X]$ est séparable et scindé sur K ou séparable et irréductible sur K de groupe de Galois $\simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Démonstration : Si a est une racine de $X^p - X - c$, alors les autres racines sont les $a + i$, $i \in \mathbb{F}_p$.

Q.e.d.

Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soient $c_1, ..., c_n \in K$. Pour tout i, soit L_i le corps de décomposition sur K (dans $\overline{K}$) des polynômes $X^p - X - c_i$. Soit $L = L_1...L_n$. On a un morphisme injectif de groupes :

$$\mathrm{Gal}(L/K) \to \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Gal}(L_i/K)$$

donc $\mathrm{Gal}(L/K)$ est abélien fini d'exposant p.

Posons $\phi : \overline{K} \to \overline{K}$, $x \mapsto x^p - x$. Soit C un sous-groupe de K tel que $\phi(K) \leq C \leq K$ et $C/\phi(K)$ est fini. Notons $L := K(\phi^{-1}(C))$ l'extension galoisienne engendré par les racines de $X^p - X - c$, $c \in C$ et $G_C := \mathrm{Gal}(K(\phi^{-1}(C))/K)$.

On considère :

$$G_C \times C \to \mathbb{F}_p,\ \sigma, c \mapsto \langle \sigma, c \rangle := \sigma(\phi^{-1}(c)) - \phi^{-1}(c)\ .$$

Proposition 15.3 *L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est biadditive et induit des isomorphismes de groupes :*

$$G_C \to \mathrm{Hom}(C/\phi(K), \mathbb{F}_p)$$

$$C/\phi(K) \to \mathrm{Hom}(G_C, \mathbb{F}_p)\ .$$

Corollaire 15.3.1 *On a deux bijections réciproques l'une de l'autre :*

$$\begin{array}{ccc} \phi(L) \cap K & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Sous-groupes } \phi(K) \leq C \leq K \\ \textit{tels que } C/\phi(K) \textit{ est fini} \end{array} \right\} & C \\ \Psi \uparrow & \Psi \uparrow \downarrow \Phi & \downarrow \Phi \\ L & \left\{ \begin{array}{c} \textit{extensions abéliennes finies} \\ \textit{d'exposant un diviseur de } p \end{array} \right\} & K(\phi^{-1}(C)) \end{array}$$

Démonstration : La suite exacte $0 \to \mathbb{F}_p \to L \to \phi(L) \to 0$ induit une suite exacte :

$$K \xrightarrow{\phi} K \cap \phi(L) \to H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{F}_p) \to 0$$

Or, $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{F}_p)$ car $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit trivialement sur $\mathbb{F}_p$. **Q.e.d.**

Remarque : en particulier, si $L/$ est galoisienne de degré p, alors il existe $x \in L \setminus K$, $c \in K$ tels que $x^p - x = c$.

15.3 Théorème d'Artin-Schreier

Il n'existe pas de sous-corps F de $\mathbb{C}$ tel que $[\mathbb{C} : F] = 3$. En effet, on a le :

Théorème 15.4 *Soit Ω un corps algébriquement clos. Soit $F \leq \Omega$ un sous-corps tel que $1 < [\Omega : F] < \infty$. Alors F est de caractéristique nulle, $\Omega = F(i)$ pour un i tel que $i^2 = -1$. En particulier $[\Omega : F] = 2$. De plus, si $a \in F^\times$, il y a un unique carré parmi $a, -a$ et toute somme finie non vide de carrés non nuls est encore un carré non nul dans $F^\times$.*

Lemme 15.5 *Soit F un corps de caractéristique p. Si $a \in F \setminus F^p$, alors pour tout $m \geq 1$, $X^{p^m} - a$ est irréductible dans $F[X]$ pour tout $m \geq 1$.*

Lemme 15.6 *Soit F un corps où -1 n'est pas un carré (en particulier, F est de caractéristique $\neq 2$) et tel que chaque élément de $F(\sqrt{-1})$ est un carré. Alors une somme finie de carrés dans F est un carré dans F et F est de caractéristique 0.*

Démonstration : Si $(a + \sqrt{-1}b) = (c + \sqrt{-1}d)^2$, alors $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$. **Q.e.d.**

Démonstration du théorème : Si K est de caractéristique p et si $[\Omega : F] = p$, alors $F = F^p$ d'après le lemme 15.5 donc Ω/F est séparable. Dans tous les cas, Ω/F est galoisienne. Si $[\Omega : F] \neq 2$, on peut supposer que $[\Omega : F] = p$ un nombre premier impair ou 4. Dans le premier cas, si $\mathrm{car}(F) \neq p$, d'après le théorème de Kummer, $\Omega = F(\alpha)$ pour un certain α tel que $\alpha^p = a \in F$. On a alors $N_{\Omega/F}(\alpha) = (-1)^{p+1}a$. Soit $\beta \in \Omega$ tel que $\beta^p = \alpha$. on a $N(\beta)^p = a$ *absurde !* Si $\mathrm{car}(F) = p$, alors $\Omega = F(\alpha)$ pour un $\alpha \in \Omega$ tel que $\alpha^p - \alpha =: a \in F$. Mais alors en considérant un $\beta \in \Omega$ tel que $\beta^p - \beta = a\alpha^{p-1}$, on obtient $\lambda_{p-1}^p - \lambda_{p-1} = a$ où $\beta = \lambda_0 + ... + \lambda_{p-1}\alpha^{p-1}$ pour certains $\lambda_i \in F$: *absurde !* car $X^p - X - a$ est irréductible sur F

Si $[\Omega : F] = 4$, on peut trouver $\Omega \geq K \geq F$ tel que $[\Omega : K] = 2$. On a $\mathrm{car}(F) \neq 2$ comme ci-dessus et en raisonnant avec la norme comme précedemment, on voit que $i \notin K$. En raisonnant avec $F(i)$ à la place de K, on trouve $i \notin F(i)$ *absurde !* **Q.e.d.**

Index

Table des matières