Fiche 1

29 janvier 2014

Exercice 1 (Question de cours).
Soient $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$ trois corps. Montrer que :

$$[K_3 : K_1] = [K_3 : K_2][K_2 : K_1] \quad .$$

Exercice 2 (Corps quadratiques).

1. Fixons $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\sqrt{d}) : \mathbb{Q}] = 2$.
2. Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$,
   (b) $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$,
   (c) il existe un nombre premier p tel que la puissance la plus élevée divisant d soit impaire,
   (d) $[\mathbb{Q}(\sqrt{d}) : \mathbb{Q}] = 2$.
3. Soient $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \mathbb{Q}$. Déterminer le polynôme minimal de α.
4. Soit maintenant L un corps intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$, en d'autres termes, $\mathbb{Q} \leq L \leq \mathbb{C}$. On suppose que $[L : \mathbb{Q}] = 2$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Montrer qu'on peut choisir d sans facteurs carrés.
5. Déterminer à isomorphisme près $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q})$.
6. Soient d et d' deux éléments de $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, sans facteurs carrés et distincts. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{d'})$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 3 (Extensions, automorphismes).
I.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$.
2. En déduire le degré de la $\mathbb{Q}$-extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
3. Soit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.
4. Dterminer le polynôme minimal P de α sur $\mathbb{Q}$ et toutes les racines de P.
5. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}(\alpha)$.
6. Soit K un sous-corps de $\mathbb{Q}(\alpha)$; en remarquant que le polynôme minimal de α sur K divise P dans $K[X]$, montrer que

$$K = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{3}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \text{ ou } \mathbb{Q}(\alpha).$$

II. On définit $w = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

1. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(w)/\mathbb{Q}$.
2. Quel est le polynôme minimal de w sur $\mathbb{Q}$.

III. Déterminer les corps de décompositions ainsi que les degrés de ceux-ci sur les corps premiers pour les polynômes suivants : $x^5 - 2$ sur $\mathbb{Q}$; $x^{p^n} - 1$ sur $\mathbb{F}_p$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (Eléments algébriques, éléments transcendants).
Soit $k \subseteq K$ une extension de corps.

1. Soit $x \in K$. Montrer que sont équivalentes :
   (i) il existe un polynôme non nul à coefficients dans k qui annule x ;
   (ii) le $k-$espace vectoriel $k[x]$ est de dimension finie sur k ;
   (iii) La $k-$algèbre $k[x]$ est un corps.
   On dit alors que x est algébrique sur k.
2. En déduire que si $x, y \in K$ sont algébriques sur k, alors $x \pm y$, xy et x/y (si $y \neq 0$) sont algébriques sur K.

   (*En revanche d'après le théorème de Gelfond-Schneider, si $x, y \in \mathbb{C}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, si $x \neq 0, 1$ et si y est irrationnel, alors x^y est transcendant sur $\mathbb{Q}$. En d'autres termes, l'exponentiation n'est pas une opération algébrique.*)
3. Si K/k est une extension algébrique, en d'autres termes une extension dont tout élément est algébrique sur k. Montrer que tout sous-anneau de K contenant k est un sous-corps.
4. On définit $K = \mathbb{Q}(t), K_1 = \mathbb{Q}(t^2), K_2 = \mathbb{Q}(t^2 - t)$.

   Montrer que K est algébrique sur K_1, algébrique sur K_2 mais non sur $K_1 \cap K_2$. (*Indication : vérifier que $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$*).
5. Soient K un corps et $L = K(u)$, où u est transcendant sur K. Soit M un sous-corps de L, qui contient K strictement. Montrer que u est algébrique sur M.
6. On considère l'extension $\mathbb{Q}(u)$ où u est racine de $X^3 - X^2 + X + 2$ dont on admettra l'irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$. Exprimer $(u^2 + u + 1)(u^2 - u)$ et $(u - 1)^{-1}$ comme une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de 1, u et u^2.

Exercice 5 (Eléments primitifs, une première rencontre).
Soit $K \leq E$ une extension de corps de degré fini et qui jouit de la propriété suivante : pour toute paire de sous-corps E_1 et E_2, soit $E_1 \leq E_2$ soit $E_2 \leq E_1$. Montrer qu'il existe un élément $\alpha \in E$ tel que $E = K(\alpha)$.