Fiche 3

12 février 2014

Exercice 1 (Corps de décomposition : polynômes de degré 3).
On étudie le polynôme $P[X] = X^3 + pX + q$ de $K[X]$ où K est un corps de caractéristique différent de 3. On supposera P irréductible. On notera L son corps de décomposition et G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$.

1. Montrer que L est une extension galoisienne.
2. Montrer que que G est isomorphe à S_3 ou à A_3 (les groupes symétrique et alterné respectivement).
   On note les racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et on définit
   $$\delta = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\alpha_i - \alpha_j) \quad .$$
3. Montrer que G est isomorphe à A_3 si et seulement si $\delta \in K$.
4. Illustrer chacun des deux possibilités par des exemples de polynômes irréductibles de racines réelles dans le cas où $K = \mathbb{Q}$.

Exercice 2 (Correspondance de Galois : polynômes de degré 4).
On étudiera le corps de décomposition L sur $\mathbb{Q}$ du polynôme $P[X] = X^4 - p$ où p est un nombre premier. On notera G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

1. Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne et que $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = \sqrt[4]{p}$.
2. Montrer que G est d'ordre 8.
3. Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_4.
4. Expliciter tous les sous-groupes de D_4 et en déduire les sous-corps de $L/\mathbb{Q}$ (*Il y en a* 8 *qui sont stricts).*

Exercice 3 (Le groupe diédral en général).
Soit G le sous-groupe des automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ engendré par

$$t \longmapsto \zeta t \quad \text{et} \quad t \longmapsto t^{-1}$$

où ζ est une racine primitive $n-$ième de 1.

(a) Montrer que G est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$.

(b) Montrer que $\mathbb{C}(t)^G = \mathbb{C}(t^n + t^{-n})$.

Exercice 4 (Propriétés des extensions normales).

1. Soit L/K une extension finie de corps. Montrer que L/K est une extension normale si et seulement si tout polynôme irréductible de $K[X]$ qui a une racine dans L s'y scinde.
2. La même caractérisation reste vraie si on enlève l'hypothèse de la finitude de l'extension. Pouvez-voir comment démontrer ?
3. Soit L/K une extension normale de degré fini. Si P est un polynôme irréductible dans $K[X]$, montrer que ses facteurs irréductibles dans $L[X]$ sont tous du même degré.

Exercice 5 (Existence d'éléments primitifs, caractérisation).
Soit L/K une extension algébrique.

1. On suppose qu'il existe x tel que $L = K(x)$. Soit P le polynôme minimal de x sur K.
   (a) Soit M un sous-corps de L, contenant K. Montrer qu'il existe un facteur unitaire Q de P dans $L[X]$ tel que M soit engendré sur K par les coefficients de Q.
   (b) En déduire que l'extension L/K n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.
2. Réciproquement, on suppose que l'extension L/K n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.
   (a) Montrer que $[L : K]$ est fini.
   (b) Si K est fini, prouver qu'il existe x avec $L = K(x)$.
   (c) Si K est infini, montrer que pour tout x, y dans L, il existe $\lambda \in K$ tel que $K(x, y) = K(x + \lambda y)$. En déduire qu'il existe x tel que $L = K(x)$.

Exercice 6 (Extensions finies, éléments primitifs).

(a) Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$.
(b) Déterminer les plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})$ dans $\mathbb{C}$.
(c) Trouver un élément primitif pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$.

Exercice 7 (Racines $p$ièmes).
Soient p un nombre premier et K un corps de caractéristique différente de p. On fixe $a \in K$ et on considère le polynôme $X^p - a$. On note L le corps décomposition de $X^p - a$ sur K

(a) Montrer que L/K est une extension galoisienne.
(b) Montrer que si $X^p - a$ est réductible dans K, alors il y a une racine.
(c) Montrer que $\mathrm{Gal}(L/K)$ est isomorphe au groupe de transformations affine de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la forme $t \mapsto at + b$ avec $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.