Fiche 7

16 avril 2014

Exercice 1 (Le corps des nombres constructibles).
Soit $\mathcal{C}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ stable par $\sqrt{\ }$. On appelle $\mathcal{C}$ *le corps des nombres constructibles.*

(a) Montrer que $e^{2i\pi/15}$ et $e^{2i\pi/17}$sont constructibles.

(b) Pour un nombre complexe z, montrer l'équivalence des trois conditions suivantes :

1. $z \in \mathcal{C}$;
2. l'ordre du groupe de Galois du polynôme minimal de z sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2 ;
3. il existe une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_n$ telle que $z \in K_n$.

(c) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

(d) Montrer que $e^{2i\pi/n}$ est constructible si et seulement si $n = 2^r p_1...p_s$ où $p_1 < ... < p_s$ sont des nombres premiers de la forme : $p_i = 2^{2^{k_i}} + 1$.

Exercice 2 (Les points constructibles).
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on définit par récurrence : $P_0 = \{0, 1\}$, et si $n \geq 1$, P_n est l'ensemble des points de P_{n-1} et des points obtenus de la manière suivante :

– on trace toutes les droites reliant deux points de P_{n-1}, tous les cercles centrés en un point de P_{n-1} et de rayon une distance entre deux points de P_{n-1} ;
– on prend toutes les intersections obtenues (entre deux droites, deux cercles, un cercle et une droite).

On appelle $\cup_{n\geq 0} P_n \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des points *constructibles à la règle et au compas.*

(a) Déterminer P_1 et P_2.

(b) On rappelle que l'on peut construire à la règle et au compas la médiatrice de deux points, la perpendiculaire à une droite passant par un point donné, la parallèle à une droite passant par un point donné. En déduire que si z_1, z_2 sont constructibles, alors $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 z_2, z_1/z_2$ le sont aussi.

(c) Montrer que les racines carrées d'un nombre constructible le sont aussi.

(d) Montrer qu'un $z \in \mathbb{C}$ est constructible si et seulement si le point correspondant dans $\mathbb{R}^2$ est constructible à la règle et au compas.