Fiche 8
18 mars 2015

Exercice 1 (Polynômes de Tchebytcheff).
On définit par récurrence les *polynômes de Tchebytcheff* dans $\mathbb{Z}[X]$.

$$T_0 = 1 \ ; \ T_1 = X \ ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \ , \ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \ .$$

I. Propriétés élémentaires :

Montrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n + z^{-n} = 2T_n(\frac{z+z^{-1}}{2})$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de T_n sont les $\cos((2k+1)\pi/(2n))$ où $0 \leq k \leq n-1$.

II. Sous-corps réels des extensions cyclotomiques : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et définit $u = e^{2i\pi/n}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne.
2. Montrer que
$$\mathbb{Q}(u) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(u + u^{-1}) = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) \ .$$
Si n est premier, alors montrer que $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))/\mathbb{Q}$ est l'unique sous-extension de $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$ de degré $\frac{n-1}{2}$.

III. Polynôme minimal de $\cos(2\pi/n)$ pour $n \geq 3$:

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et de terme constant non nul. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est racine de P si et seulement si z^{-1} est racine de P ;
   (b) Soit pour tout $0 \leq k \leq n$, $a_{n-k} = a_k$, soit pour tout $0 \leq k \leq n$, $a_{n-k} = -a_k$.
2. Montrer que pour $n \geq 3$, $\Phi_n(X)$ satisfait la première condition de (b) dans le point précédent et que son degré, $\varphi(n)$, est pair.
3. Montrer alors que si $\Phi_n(X)$ est de la forme
$$X^{\varphi(n)} + 1 \ + \ b_{\varphi(n)-1}(X^{\varphi(n)-1} + X) \ + \ \dots \ + \ b_{\frac{\varphi(n)}{2}+1}(X^{\frac{\varphi(n)}{2}+1} + X^{\frac{\varphi(n)}{2}-1}) \ + \ b_{\frac{\varphi(n)}{2}} \ X^{\frac{\varphi(n)}{2}} \ ,$$
alors le polynôme minimal de $\cos(2\pi/n)$ est
$$\frac{1}{2^{\frac{\varphi(n)}{2}}} \sum_{i=0}^{\varphi(n)/2} \left(b_{(\varphi(n)/2)-i} \ T_i(X)\right) \ ,$$
ou encore
$$\frac{1}{2^{\frac{\varphi(n)}{2}}} \left(b_{\frac{\varphi(n)}{2}} \ + \ \sum_{i=1}^{\varphi(n)/2} 2b_{(\varphi(n)/2)+i} \ T_i(X) \right) \ .$$

Exercice 2 (Extensions cyclotomiques).

1. Calculer $\Phi_{15}(X)$ et montrer que le polynôme minimal de $\cos(2\pi/15)$ sur $\mathbb{Q}$ est le polynôme : $X^4 - \frac{1}{2}X^3 - X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{16}$.
2. Déterminer $\cos(2\pi/5)$. En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ est une sous-extension de $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/15))/\mathbb{Q}$.
3. Déterminer le polynôme minimal de $\cos(2\pi/15)$ sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Fiche 8 bis
18 mars 2015

Exercice 1 (Résolvantes).
Soit $f(X_1, ..., X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$. Soit G un sous-groupe de S_n. On note H le sous-groupe des $\sigma \in G$ tels que $f^\sigma = f$.

On suppose que $P(X)$ est un polynôme séparable de degré n sur un corps k. On note L/k un corps de décomposition de P sur k et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ses racines dans L. On définit :

$$R_G(f,P) = \prod_{\sigma H \in G/H} (X - f(\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(n)})) \in L[X] \quad .$$

(a) Montrer que si $\mathrm{Gal}(L/k) \subseteq G$, alors $R_G(f,P) \in k[X]$.
(b) Montrer que si de plus, $R_G(f,P)$ a une racine simple dans k, alors $\mathrm{Gal}(L/k)$ est conjugué à un sous-groupe de H.

Exercice 2 (Groupe de Galois des quartiques).
On note V le sous-groupe $\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ de S_4.
(a) Montrer que V est distingué dans S_4 et que $V \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(b) Montrer que les sous-groupes transitifs de S_4 sont

$$S_4, A_4, V \text{ ou un sous-groupe isomorphe à } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ ou } D_8$$

(on note D_8 le groupe diédral d'ordre 8 (c'est le groupe des isométries du carré)).
(c) Soit $P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ un polynôme irréductible à coefficients dans un corps k de caractéristique $\neq 2, 3$. Vérifier que $P(X)$ a 4 racines distinctes, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ dans son corps de décomposition L.
(d) On pose $f = (X_1 + X_2)(X_3 + X_4)$. On note $R(X) = R_{S_4}(f,P)$. Montrer que $R(X) = (X - \theta_1)(X - \theta_2)(X - \theta_3)$ où :

$$\theta_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) \quad , \quad \theta_2 = (\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_4) \quad , \quad \theta_3 = (\alpha_3 + \alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_4) \quad .$$

(e) Montrer que $R(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 - 4r)X + q^2$.
(f) Montrer que $\theta_1 - \theta_2 = (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)$. En déduire que $R(X)$ et $P(X)$ ont le même discriminant Δ.
(g) Soit G le groupe de Galois de L sur k. On note $G_1 = G \cap V$. Montrer que

$$L^{G \cap V} = k(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

le corps de décomposition de $R(X)$ sur k. On pose $M = k(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.
(h) Montrer que le tableau suivant décrit bien toutes les possibilités pour le groupe de Galois du polynôme $P(X)$ sur k :

$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ irréductible sur k		$G = S_4$
$\Delta \in k^2$	$R(X)$ irréductible sur k		$G = A_4$
$\Delta \in k^2$	$R(X)$ scindé sur k		$G = V$
$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ a une racine dans k	$P(X)$irréductible sur M	$G \cong D_8$
$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ a une racine dans k	$P(X)$réductible sur M	$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(i) *Applications :* Montrer que si le polynôme $X^4 + bX^2 + d$ est irréductible sur k, alors son groupe de Galois est V si d est un carré dans k, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si $d \notin k^2$ et $\frac{b^2}{d} - 4 \in k^2$ et D_8 sinon.
Déterminer les groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$ des polynômes $X^4 - X - 1$ et $X^4 + 8X + 12$.