Fiche 9

8 avril 2015

Exercice 1 (Un simple exemple de résolubilité par radicaux).
Soient p un nombre premier, $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, irréductible sur $\mathbb{Q}$ et de degrée p. Montrer que si P a exactement deux racines imaginaires, alors son groupe de Galois est isomorphe à S_p. Appliquer le résultat au polynôme $X^5 - 4X + 2$.

Exercice 2 (Norme et trace : calculs simples).
Rappel : Soit L/K une extension finie. La norme et la trace définissent des morphismes de groupes multiplicatifs et additifs, de $(L^\times, .)$ vers $(K^\times, .)$ et de $(L, +)$ vers $(K, +)$ respectivement.

I. Soit p un nombre premier.

- **(a)** Montrer que le polynôme $X^3 - p \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
  Soit α une racine de $X^3 - p$. On pose $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
- **(b)** Déterminer $[K : \mathbb{Q}]$ et comparer les extensions K et $\mathbb{Q}(\alpha^2)$.
- **(c)** Montrer que K est $\mathbb{Q}$-isomorphe à l'algèbre des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & pc & pb \\ b & a & pc \\ c & b & a \end{pmatrix} \quad , \quad (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \quad .$$

- **(d)** Montrer que l'équation $X^3 + pY^3 + p^2Z^3 - 3pXYZ = 0$ admet $(0, 0, 0)$ pour unique solution dans $\mathbb{Q}^3$.
- **(e)** Quel est le polynôme minimal de α^2 dans $\mathbb{Q}[X]$?

II. En utilisant la trace et la norme, montrer que $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ et que $1 + \sqrt[3]{2}$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

III. On pose $P(X) = X^3 + X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

- **(a)** Montrer que le polynôme P est irréductible sur $\mathbb{Q}$ avec une unique racine réelle.
- **(b)** On fixe une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de P et pose $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Déterminer la trace de α^2. Déterminer son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$.
- **(c)** Pour $z \in L$, calculer $\mathrm{tr}_{L/\mathbb{Q}}(z)$.

IV.

- **(a)** Soit $L = K(\alpha)$ une extension algébrique de degré n du corps K. Si P est le polynôme minimal de α sur K, alors pour $a \in K$, $N_{L/K}(\alpha - a) = (-1)^n P(a)$
- **(b)** Soient $n \geq 2$ et z une racine primitive $n$ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. On définit $L = \mathbb{Q}(z)$. Déterminer $N_{L/\mathbb{Q}}(1 - z)$ suivant les valeurs de n.

Exercice 3 (La surjectivité de la norme et de la trace).

1. Soit L/K une extension de corps finis. Montrer que le morphisme de groupes multiplicatifs $N_{L/K}$ de $L^\times$ vers $K^\times$ est en fait surjectif.
2. On considère une extension L/K de degré fini.

   (i) Montrer que si L/K n'est pas une extension séparable alors $\mathrm{tr}_{L/K} = 0$.

   (ii) Montrer si L/K est séparable, alors la trace $\mathrm{tr}_{L/K}$ est un morphisme surjectif de $(L, +)$ sur $(K, +)$.

Exercice 4 (Hilbert Satz 90 : une autre manière de voir les choses).
I. Soit L/K une extensions galoisienne de corps de groupe de Galois G. On suppose l'existence d'une application $\sigma \longmapsto u_\sigma$ de G vers $L^\times$ qui satisfait la condition suivante : $u_{\sigma\tau} = \sigma(u_\tau)u_\sigma$ pour tous $\sigma, \tau \in G$. Montrer qu'il existe $x \in L$, non nul, tel que pour tout $\sigma \in G$, $u_\sigma = x(\sigma(x))^{-1}$.

II. Appliquer le résultat précédent pour démontrer Hilbert Satz 90.

Exercice 5 (Extensions cycliques : version additive).
I. Soit L/K une extensions galoisienne de corps de groupe de Galois G. On suppose l'existence d'une application $\sigma \longmapsto u_\sigma$ de G vers L qui satisfait la condition suivante : $u_{\sigma\tau} = \sigma(u_\tau) + u_\sigma$ pour tous $\sigma, \tau \in G$. Montrer qu'il existe $x \in L$, non nul, tel que pour tout $\sigma \in G$, $u_\sigma = x - \sigma(x)$.

II. Soit L/K une extension cyclique de groupe de Galois $G = \langle \sigma \rangle$. Montrer que si $x \in L$ est de trace 0, alors il existe $y \in L$ tel que $x = y - \sigma(y)$.

III. Soit K un corps de caractéristique p non nulle. Si L/K est une extension cyclique de dimension p, montrer que $L = K(y)$ tel que $y^p - y \in K$.