I : 4 II : 6 III : 6 IV : 15

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE ÉLÉMENTAIRE

Examen partiel (*durée : 2 heures*)
mercredi 19 mars 2014

NB : L'usage des notes de cours est autorisé.
Dans tous les exercices, k est un corps algébriquement clos.

4

Exercice 1 a) Soit I un idéal de $k[X_1, ..., X_n]$ tel que l'espace quotient $k[X_1, ..., X_n]/I$ est de dimension finie. Montrer que $V(I)$ est fini.

b) Réciproquement soit $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un fermé algébrique fini. Montrer que l'idéal $I(X)$ est de codimension finie dans $k[X_1, ..., X_n]$ et que $|X| = \dim_k k[X_1, ..., X_n]/I(X)$.

Exercice 2 Soit X un fermé algébrique de $\mathbb{A}^n$. Soit U un ouvert de X. On dit que U est une variété algébrique affine s'il existe Y un fermé algébrique d'un certain $\mathbb{A}^N$ et un isomorphisme $f : U \to Y$.

a) Soit $F \in k[X_1, ..., X_n]$ une fonction non nulle sur X. On pose X_F l'ouvert $\{x \in X : F(x) \neq 0\}$. Montrer que X_F est affine, isomorphe à un fermé de $\mathbb{A}^{n+1}$. 2

b) Soit $x \in U$. Montrer que l'idéal $M_x := \{f \in k[U] : f(x) = 0\}$ est maximal dans $k[U]$. Montrer que si U est une variété algébrique affine, alors l'application : 1,5

$$x \mapsto M_x$$

est une bijection entre les points de U et les idéaux maximaux de $k[U]$.

c) Déterminer $k[\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}]$ et en déduire que $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas une variété algébrique affine. 1+ : 1,5

Exercice 3 Soit k un corps de caractéristique $\neq 2, 3$.
Soit $\phi : \mathbb{A}^2 \setminus (U = 0) \to \mathbb{A}^2$, $(u, v) \mapsto (2\frac{v+1}{u^2}, 4\frac{v+1}{u^3})$. Soient $C_1 := V(V^2 - U^4 - 1)$, $C_2 := V(Y^2 - X^3 + 4X) \subseteq \mathbb{A}^2$.

a) Montrer que C_1 est lisse. 1,5

b) Montrer que ϕ est régulière sur $C_1 \setminus \{(0, 1)\}$. 2

c) Montrer en donnant l'inverse que ϕ induit un isomorphisme $C_1 \setminus \{(0, 1)\} \to C_2 \setminus \{(0, \pm 2)\}$. 1 ⊂ C_2 · inverse : 1,5

Exercice 4 Soit I l'idéal de $k[X, Y, Z]$ engendré par ~~$f :=$~~ $XZ - Y^2$ et $X^3 - YZ$. On pose $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$, $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$.

a) Montrer que dans $\mathbb{A}^3$, $V(I) = V(I, X) \cup V(I, Z^2 - X^2Y)$. 1

b) Montrer que $V(I, X)$ est une droite et la déterminer. 0,5

c) Montrer que $C := f(\mathbb{A}^1) = V(I, Z^2 - X^2Y)$. En déduire les composantes irréductibles de $V(I)$. 2+1

d) Montrer que le morphisme $k[X, Y, Z] \to k[T]$, $X \mapsto T^3$, $Y \mapsto T^4$, $Z \mapsto T^5$ a pour noyau $(XZ - Y^2, X^3 - YZ, Z^2 - X^2Y)$ et en déduire que $I(C)$ est engendré par $XZ - Y^2$, $X^3 - YZ$ et $Z^2 - X^2Y$. 2,5

e) Supposons *par l'absurde* que $I(C)$ peut être engendré par deux éléments $f, g \in k[X, Y, Z]$. On note f_2, g_2 les composantes homogènes de de degré 2 de f, g. Montrer que $XZ - Y^2, Z^2, YZ \in \mathrm{Vect}_k\{f_2, g_2\}$ et en déduire une contradiction. 2

f) Montrer néanmoins que $C = V(XZ - Y^2, X^5 - 2X^2YZ + Z^3)$ (indication : sur $V(XZ - Y^2)$, la fonction $X^5 - 2X^2YZ + Z^3$ est *presque* un carré). 1,5

g) Soit M l'idéal maximal de $k[C]$ des fonctions qui s'annulent en $(0, 0, 0)$. Montrer que M/M^2 est de dimension 3 sur k (indication : on peut utiliser que $k[C] \simeq k[T^3, T^4, T^5]$ et raisonner dans $k[T^3, T^4, T^5] \subseteq k[T]$). 1

h) En déduire que si U est un voisinage ouvert de $(0, 0, 0)$ dans C, alors U n'est pas isomorphe à un ouvert d'une courbe algébrique plane. 3

i) La courbe C est-elle lisse ? 0,5