Corrigé de l'examen final du mardi 14 mai 2013

Exercice 1 1.1) Le polynôme $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ est irréductible d'après le critère d'Eisenstein. $F = y^2z - x(x-z)(x-\lambda z)$. Si $[x:y:1] \in C$ est singulier, alors :

$$\begin{cases} y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \\ 2y = 0 \\ (x-1)(x-\lambda) + x(x-\lambda) + x(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, 1 \text{ ou } \lambda \\ \lambda,\ 1-\lambda \text{ ou } \lambda(\lambda-1) = 0 \end{cases}$$

absurde ! Point à l'infini : $P = [x:y:0]$ tel que $x^3 = 0$ *i.e.* $P = [0:1:0]$. On a $F_X(P) = -\lambda \neq 0$. Donc P est lisse. $H_F = \begin{vmatrix} -6x + 2(\lambda+1)z & 0 & 2[(\lambda+1)x - \lambda z] \\ 0 & 2z & 2y \\ 2[(\lambda+1)x - \lambda z] & 2y & -2\lambda x \end{vmatrix}$ donc $H_F(P) = 0$ et P est un point d'inflexion. Si $[x:y:1]$ est un autre point d'inflexion, alors on a :

$$\begin{cases} y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \\ H_F(x,y,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \\ 8[(3x-(\lambda+1))(\lambda x + y^2) - ((\lambda+1)x - \lambda)^2] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \\ 8[(3x-(\lambda+1))(\lambda x + x(x-1)(x-\lambda)) - ((\lambda+1)x - \lambda)^2] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \\ 3x^4 - 4(\lambda+1)x^3 + 6\lambda x^2 - \lambda^2 = 0 \end{cases}.$$

Soit $P(x) := 3x^4 - 4(\lambda+1)x^3 + 6\lambda x^2 - \lambda^2$. Le polynôme P est séparable : en effet, $P'(x) = 12x(x-\lambda)(x-1)$ donc $P(x) = P'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$ ou λ. Or $P(0) = -\lambda^2 \neq 0$, $P(1) = -(\lambda-1)^2 \neq 0$, $P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-1)^2 \neq 0$. Donc P a 4 racines distinctes : x_1, x_2, x_3, x_4. Les points d'inflexion de C autres que le point à l'infini sont donc :

$$[x_i : \pm\sqrt{x_i(x_i-1)(x_i-\lambda)} : 1]$$

$1 \leq i \leq 4$.

1.2) Si on applique l'identité d'Euler aux polynômes F_X, F_Y, F_Z qui sont homogènes de degré $d-1$, on trouve : $XL_1 + YL_2 + ZL_3 = (d-1)(F_X, F_Y, F_Z)$. Donc :

$$ZH_F = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ ZL_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ XL_1 + YL_2 + ZL_3 \end{vmatrix} = (d-1) \begin{vmatrix} F_{XX} & F_{XY} & F_{XZ} \\ F_{YX} & F_{YY} & F_{YZ} \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix}.$$

Donc $Z^2 H_F = (d-1) \begin{vmatrix} F_{XX} & F_{XY} & ZF_{XZ} \\ F_{YX} & F_{YY} & ZF_{YZ} \\ F_X & F_Y & ZF_Z \end{vmatrix}$. On fait l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + XC_1 + YC_2$ et on trouve : $ZH_F = (d-1) \begin{vmatrix} F_{XX} & F_{XY} & (d-1)F_X \\ F_{YX} & F_{YY} & (d-1)F_Y \\ F_X & F_Y & dF \end{vmatrix} = (d-1)^2 \begin{vmatrix} F_{XX} & F_{XY} & F_X \\ F_{YX} & F_{YY} & F_Y \\ F_X & F_Y & dF/(d-1) \end{vmatrix}$.

1.3) On développe par rapport à la dernière colonne : $h = (d-1)^2 f_x(f_y f_{yx} - f_{yy} f_x) - f_y(f_{xx} f_y - f_x f_{xy}) \bmod f = -(d-1)^2 g \bmod f$. Donc $I_O(f,h) = I_O(f,g)$.

1.4) On peut supposer que $f_y(0,0) = 1$ d'où $f = y + ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + py^3 + qx^2y + rxy^2 +$ des monômes de degrés ≥ 4.
Cherchons les termes de degrés ≤ 1 de g :

$$g = (1 + bx + 2cy + ...)^2(2a + 6dx + 2qy + ...) + (2ax + by + ...)^2 f_{yy}$$

$$-2(2ax + by + ...)(1 + bx + 2cy + ...)(b + 2qx + 2ry + ...)$$

$$= 2a + 6dx + (2q + 8ac - 2b^2)y + ...$$

où ... sont des termes homogènes de degrés ≥ 2. Donc $I_0(f,h) = I_0(f,g) = I_0(y + ax^2 + ..., 2a + 6dx + ty + ...) = 0$ si $a \neq 0$, 1 si $a = 0$, $d \neq 0$, ≥ 2 si $a = d = 0$ (car dans ce cas, $I_0(f,g) = I_0(f, g - tf) = I_0(y + ax^2 + ...,$ somme de monômes de degrés > 1)).

1.5) $T_P C$ a pour équation : $F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z = 0$.

1.6) Quitte à faire un changement de variables linéaires, on peut supposer que $P = [0:0:1]$. Alors $H_F(0,0,1) = h(0,0)$. Donc $H_F(P) = 0$ si P est singulier. Si P est lisse, quitte à faire un changement de variables de la forme :

$$X \mapsto aX + bY,\ Y \mapsto cX + dY,\ Z \mapsto Z$$

avec $ad - bc \neq 0$, on peut toujours supposer que $P = [0:0:1]$ et que $f_x(0,0) = 0$ (il suffit de choisir a, c pour que $\partial_x(f(ax+by, cx+dy))|_{(0,0)} = af_x(0,0) + cf_y(0,0) = 0$). On a donc $H_F(P) = 0 \Leftrightarrow h(0,0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. D'un autre côté, $I_P(C, T_PC) = I_{(0,0)}(y + ax^2 + bxy + cy^2 + ..., y) = I_{(0,0)}(y + ax^2 + bxy + cy^2 + ... - (bx + cy + ...)y, y) = I_{(0,0)}(ax^2 + dx^3 + ..., y) = 2$ si $a \neq 0$, ≥ 3 si $a = 0$.

1.7) Si $F|H_F$, c'est évident (en fait ce cas n'arrive pas si $d > 2$) sinon, d'après Bézout : $\sum_P I_P(F, H_F) = 9d(d-2) > 0$. Donc il existe au moins un $P \in \mathbb{P}^2$ tel que $F(P) = H_F(P) = 0$.

1.8) D'après la question 1.5), on a : $f(x,y) = F(x,y,1) = y + ax^2 + bxy + cy^2 +$ une cubique en x, y car $\deg f \leq 3$. Or, $a = 0$ et $F(X,Y,Z) = Z^3 f(X/Z, Y/Z, 1) = Z^2Y + bXYZ + cY^2Z +$une cubique en X, Y.

On pose $Z' := Z - b/2X - c/2Y$ (remarque : P reste fixe ainsi que la tangente T_PC). On a : $F(X,Y,Z') = Z'^2Y -$ une forme cubique en X, Y.

1.9) Soit F une forme cubique irréductible. Soit P un point d'inflexion. On peut trouver un changement de variables linéaire tel que $P = [0:0:1]$ et T_PC a pour équation $Y = 0$. On peut donc trouver un changement de variables linéaire tel que $F = Z^2Y - P(X,Y)$ où $P \in \mathbb{C}[X,Y]_3$.

1.10) Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, comme $Y \nmid P$ (sinon $Y|F$ or, F est irréductible), il exsite $\alpha \in \mathbb{C}^\times, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = Z^2Y - \alpha X(X - z_1Y)(X - z_2Y)\ .$$

On fait le changement de variables : $X \mapsto \mu X$, $Y \mapsto \nu Y$, $Z \mapsto \xi Z$: F se transforme en :

$$\xi^2\nu Z^2Y - \alpha\mu^3 X(X - z_1\nu/\mu Y)(X - z_2\nu/\mu Y)$$

il suffit de choisir μ, ν, ξ tels que : $\mu^3 = 1/\alpha$, $\nu = \mu/z_i$ pour un i tel que $z_i \neq 0$ ou $\nu \neq 0$ (quelconque) si $z_1 = z_2 = 0$ et $\xi^2 = 1/\nu$. On trouve : $F = Z^2Y - X^3$, $Z^2Y - X^2(X - Y)$ ou $Z^2Y - X(X - Y)(X - \lambda Y)$ pour un $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

1.11) Les courbes $Z^2Y = X^3$, $Z^2Y = X^2(X-Y)$ sont singulières. Donc une courbe irréductible plane lisse est projectivement équivalente à $C : Y^2Z = X(X-Z)(X-\lambda Z)$ pour un $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ (en échangeant Y et Z). Une telle courbe a 9 points d'inflexions d'après la question 1.1).

De plus, $\sum_P I_P(F, H_F) = 9$. Donc pour chaque point d'inflexion, $I_P(F, H_F) = 1$. Soit P un point d'inflexion. Après un changement de variables linéaire, on peut supposer que $P = [0:0:1]$. On pose $f(x,y) := F(X,Y,1)$. À une constante multiplicative près, on a : $f = y+bxy+cy^2+dx^3+...$ où $d \neq 0$ (d'après la question 1.5)). Donc $I_P(C, T_PC) = I_{(0,0)}(y+bxy+cy^2+dx^3+..., y) = I_{(0,0)}(dx^3+..., y) = 3$. Donc P (et de même tous les autres points d'inflexion) est ordinaire.

Exercice 2 2.1) $f(\mathbb{P}^1) = f\left(\overline{\mathbb{P}^1 \setminus \{[0:1]\}}\right) \subseteq \overline{f(\mathbb{P}^1 \setminus \{[0:1]\})} \subseteq T$. D'un autre côté, $\{[1:t:t^2:t^3] \ : \ t \in \mathbb{C}\} \subseteq f(\mathbb{P}^1) \Rightarrow T \subseteq \overline{f(\mathbb{P}^1)} = f(\mathbb{P}^1)$. En particulier, $T = \{[1:t:t^2:t^3] \ : \ t \in \mathbb{C}\} \cup \{[0:0:0:1]\}$.

2.2) Il est clair que $f(\mathbb{P}^1) = T \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$. Si $P = [1:y:z:w] \in Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$, alors $z = y^2$ et $w = yz = y^3$ donc $P = [1:y:y^2:y^3] \in T$. Si $P = [:y:z:w] \in Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$, alors $y^2 = 0$ et $z^2 = 0$ donc $y = z = 0$ et $P = [0:0:0:1] \in f(\mathbb{P}^1) = T$. $[0:0:1:1 \in Q_1 \cap Q_2 \setminus T$, $[1:0:0:1] \in Q_1 \cap Q_3 \setminus T$, $[1:1:0:0] \in Q_2 \cap Q_3 \setminus T$.

2.3) Soit $I := (XZ - Y^2, XW - YZ, YW - Z^2)$. Soit E l'ensemble des polynômes de la forme

$$A(X,W) + YB(X,W) + ZC(X,W) + D(X,Y,Z,W)$$

avec $D \in (XZ - Y^2, XW - YZ, YW - Z^2)$.

On a $XA(X,W), YA(X,W), ZA(X,W), WA(X,W) \in E$; $XYB(X,W) = YXB(X,W)$, $Y^2B(X,W) = ZXB(X,W) \bmod I$, $ZYB(X,W) = XWB(X,W) \bmod I$, $WYB(X,W) = YWB(X,W) \in E$; $XZC(X,W) = ZXC(X,W)$, $YZC(X,W) = XWC(X,W) \bmod I$, $Z^2C(X,W) = YWC(X,W) \bmod I$, $WZC(X,W) = ZWC(X,W) \in E$. Comme $1 \in E$, on en déduit que tout monôme est dans E et donc que $E = \mathbb{C}[X,y,Z,W]$.
Si F est homogène, $F - A(X,W) - YB(X,W) - ZC(X,W) \in I$ pour certains $A, B, C \in \mathbb{C}[X,W]$. Comme I est homogène, toutes les composantes homogènes de $F - A(X,W) - YB(X,W) - ZC(X,W)$ sont dans I on peut donc supposer que A, B, C sont homogènes.

2.4) Soit F homogène $\in I(T)$. On a $F = A(X,W) + YB(X,W) + ZC(X,W) \bmod I$ pour certains polynômes homogènes A, B, C. On peut donc supposer que $F =$

$A(X,W)+YB(X,W)+ZC(X,W)$. Mais alors $F\big|_{f(\mathbb{P}^1)} = 0 \Rightarrow A(S^3,T^3) + S^2TB(S^3,T^3)+ST^2C(S^3,T^3) = 0$ dans $\mathbb{C}[S,T]$. Les monômes qui apparaissent dans $A(S^3,T^3)$ sont de la forme $S^{3m}T^{3n}$ ceux qui apparaissent dans $S^2TB(S^3,T^3)$ sont de la forme $S^{3m+2}T^{3n+1}$ et ceux qui apparaissent dans $ST^2C(S^3,T^3)$ sont de la forme $S^{3m+1}T^{3n+2}$. Donc $A(S^3,T^3) = S^2TB(S^3,T^3) = ST^2C(S^3,T^3) = 0$ d'où $A = B = C = 0$ et $F \in I$. L'autre inclusion est évidente.

2.5) Si $s = 0$, $[s^3 : s^2t : st^2 : t^3] = [0:0:0:1]$.

2.6) Soient $e_1, ..., e_4$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$ et $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$. Soit $l = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^*$ une forme linéaire. On a $l|_T = 0 \Leftrightarrow {}^\forall t \in \mathbb{C},\ a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \Leftrightarrow l = 0$.

2.7) Soient $F_1, ..F_l$ des polynômes qui engendrent $I(T)$. Comme $I(T)$ est homogène les composantes homogènes de degrés d : $F_{i,d}$ sont dans $I(T)$. D'après ce qui précède, $F_{i,d} = 0$ si $d = 0, 1$.

Il existe $A_1, ..., A_l \in \mathbb{C}[X,Y,Z,W]$ tels que $\sum_i A_iF_i = XZ - Y^2 \in I(T)$. En prenant les composantes homogènes de degré 2 de part et d'autre, on trouve :

$$\sum_i A_{i,0}F_{i,2} = XZ - Y^2$$

Donc $XZ - Y^2 \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{F_{1,2}, ..., F_{l,2}\}$ car ${}^\forall i,\ A_{i,0} \in \mathbb{C}$. De même pour les formes quadratiques $XW - YZ$ et $YW - Z^2$. Or les formes quadratiques :

$$XZ - Y^2,\ XW - YZ,\ YW - Z^2$$

sont $\mathbb{C}-$linéairement indépendantes. Donc $l \geq 3$.

2.8) Il est clair que $f(\mathbb{P}^1) = T \subseteq H_1 \cap H_2$. Réciproquement, on a $(xw-yz)^2 = x(z^3 + xw^2 - 2yzw) + z^2(y^2 - xz)$ et $(yw-z^2)^2 = z(z^3+xw^2-2yzw)+w^2(y^2-xz)$. On a donc $(XZ-Y^2,\ XW-YZ,\ YW-Z^2) \leq \sqrt{(Z^3 + XW^2 - 2YZW, Y^2 - XZ)} \Rightarrow T \supseteq H_1 \cap H_2$.