Examen final
mercredi 14 mai 2014
durée : 3 heures
documents autorisés

Le corps k est algébriquement clos.

Exercice 1 a) Soient F_1, F_2 deux fermés irréductibles de $\mathbb{P}^2$ de dimension 1. Montrer que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. En déduire que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^2$.

b) Soit $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $([x : y], [z : t]) \mapsto [xz : xt : yz : yt]$ est un morphisme d'image $F := V_{\mathbb{P}^3}(x_0x_3 - x_1x_2)$. Montrer que $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to F$ est un isomorphisme en explicitant l'inverse $f^{-1} : F \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Exercice 2 On note $k[X, Y, Z]_d$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré d en X, Y, Z à coefficients dans k.

a) Déterminer $\dim_k k[X, Y, Z]_d$ et en déduire que par $\binom{d+2}{2} - 1$ points distincts de $\mathbb{P}^2$ passe toujours au moins une courbe de degré d dans $\mathbb{P}^2$.

b) Soit $C \subseteq \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible de degré d. On suppose que C a $N := \binom{d-1}{2} + 1$ points singuliers $P_1, ..., P_N$. On choisit $3d - 3$ points $Q_1, ..., Q_{3d-3}$ sur $C \setminus \{P_1, ..., P_N\}$ et un point $Q \notin C$. Justifier l'existence d'une courbe $C' \subseteq \mathbb{P}^2$ de degré d qui passe par $P_1, ..., P_N, Q_1, ..., Q_{3d-3}, Q$. Montrer que $I_P(C, C') \geq 2$ si $P = P_1, ..., P_N$. En déduire une contradiction à l'aide du théorème de Bézout. Conclusion ?

Exercice 3 Pour tout n, on note $k[X, Y, Z]_n$ le $k-$espace vectoriel des polynômes homogènes à coefficients dans k de degré n.

Soient $F \in k[X, Y, Z]_d$, $G \in k[X, Y, Z]_e$ deux polynômes homogènes de degrés d, e sans facteur carré. On suppose que $|V_{\mathbb{P}^2}(F) \cap V_{\mathbb{P}^2}(G)| = de$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété suivante :

$$(\mathscr{P}_n) \quad {}^\forall H \in k[X, Y, Z]_n,\ V_{\mathbb{P}^2}(H) \supseteq V_{\mathbb{P}^2}(F, G) \Rightarrow H \in k[X, Y, Z]_{n-d}F + k[X, Y, Z]_{n-e}G \ .$$

a) Rappeler pourquoi au moins l'un des polynômes $\partial_X F, \partial_Y F, \partial_Z F$ est non nul.

b) Montrer que F, G n'ont pas de facteur commun et que si $P \in V_{\mathbb{P}^2}(F) \cap V_{\mathbb{P}^2}(G)$, l'intersection de $V_{\mathbb{P}^2}(F)$ et $V_{\mathbb{P}^2}(G)$ en P est transverse.

c) On montre d'abord $\mathscr{P}_n$ lorsque $n \geq de - 1$:
soit $H \in k[X, Y, Z]_n$. on suppose que $V_{\mathbb{P}^2}(H) \supseteq V_{\mathbb{P}^2}(F, G)$ et que $n \geq de - 1$. On choisit $x_1, ..., x_{de} \in \mathbb{A}^3 \setminus \{0\}$ tels que $\{[x_1], ..., [x_{de}]\} = V_{\mathbb{P}^2}(F, G)$. Montrer que pour tout i, il existe une droite $D_i \subseteq \mathbb{P}^2$ telle que $D_i \cap V_{\mathbb{P}^2}(F, G) = \{[x_i]\}$ et qu'il existe une droite $D \subseteq \mathbb{P}^2$ telle que $D \cap V_{\mathbb{P}^2}(F, G) = \emptyset$. On pose

$$\Phi : k[X, Y, Z]_n \to k^{de},\ P \mapsto (P(x_i))_{1 \leq i \leq de} \ .$$

Montrer que Φ est surjective *(indication : soit λ une équation pour D, λ_i une équation pour D_i (${}^\forall i$), considérer $\Phi(\lambda^{n-de+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{de} \lambda_j)$).*

En déduire $\dim_k \ker \Phi$. En déduire que $\ker \Phi = k[X, Y, Z]_{n-d}F + k[X, Y, Z]_{n-e}G$.

La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc vraie lorsque $n \geq de - 1$.

d) On montre maintenant la propriété $\mathscr{P}_n$ si $n \geq d + e - 1$ par récurrence descendante :
supposons que la propriété $\mathscr{P}_m$ est vraie pour un $m \geq d + e$. Soit $H \in k[X, Y, Z]_{m-1}$ tel que $V_{\mathbb{P}^2}(H) \supseteq V_{\mathbb{P}^2}(F, G)$. Montrer que pour toute forme linéaire $\lambda \in k[X, Y, Z]_1$, il existe $A_\lambda, B_\lambda \in k[X, Y, Z]$ homogènes tels que $A_\lambda F + B_\lambda G = \lambda H$.

On admettra le lemme suivant :

Lemme 1 *Il existe une forme linéaire $\lambda \in k[X,Y,Z]_1$ telle que*

$$V_{\mathbb{P}^2}(\lambda) \cap V_{\mathbb{P}^2}(F,G) = \emptyset \text{ et } \forall P \in V_{\mathbb{P}^2}(\lambda) \cap V_{\mathbb{P}^2}(F),\ I_P(V_{\mathbb{P}^2}(\lambda), V_{\mathbb{P}^2}(F)) = 1 \ \square$$

Soit λ comme dans le lemme. On pose $E := V_{\mathbb{P}^2}(\lambda, F)$. Déterminer $|E|$. Soit $E' \subseteq V_{\mathbb{P}^2}(\lambda)$ une partie disjointe de E de cardinal $m-d-e+1$. Pour tout $x \in E'$, on choisit $\widehat{x} \in \mathbb{A}^3 \setminus \{0\}$ tel que $[\widehat{x}] = x$. Soient $A_\lambda, B_\lambda \in k[X,Y,Z]$ homogènes tels que $\lambda H = A_\lambda F + B_\lambda G$. Montrer qu'il existe $Q \in k[X,Y,Z]_{m-d-e}$ tel que $Q(\widehat{x}) = \frac{B_\lambda(\widehat{x})}{F(\widehat{x})}$ pour tout $x \in E'$ (*indication : soit $N := m-d-e$, considérer l'application $\psi : k[X,Y,Z]_N \to k^{N+1}$, $Q \mapsto (Q(\widehat{x}))_{x \in E'}$, trouver son noyau et en déduire que ψ est surjective !*).
En déduire qu''il existe A, B homogènes dans $k[X,Y,Z]$ tels que $\lambda H = AF + BG$ et $V_{\mathbb{P}^2}(B) \supseteq E'$ (*indication : chercher A, B sous la forme $A = A_\lambda \bmod (G)$ $B = B_\lambda \bmod (F)$*).
Montrer que B s'annule sur $E \cup E'$.
En déduire que $\lambda | B$ et que $\lambda | A$. On a donc $H = \frac{A}{\lambda}F + \frac{B}{\lambda}G$.
La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc vraie lorsque $n \geq d+e-1$.

e) On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un $n \leq d+e-1$. On montre que $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie : soit $H \in k[X,Y,Z]_{n-1}$ tel que $V_{\mathbb{P}^2}(H) \supseteq V_{\mathbb{P}^2}(F,G)$. On admettra qu'il existe $\lambda \in k[X,Y,Z]_1$ comme dans le lemme précédent. Par hypothèse de récurrence, il existe $A, B \in k[X,Y,Z]$ homogènes tels que $\lambda H = AF + BG$. Montrer que $V_{\mathbb{P}^2}(\lambda)$ est une composante de $V_{\mathbb{P}^2}(B)$ et conclure.

f) Démontrer le lemme 1 (*indication : il suffit de trouver une droite D qui ne passe par aucun point de $V_{\mathbb{P}^2}(F,G)$ ni aucun point singulier de $V_{\mathbb{P}^2}(F)$ et qui n'est pas une tangente à $V_{\mathbb{P}^2}(F)$ (justifier-le !). Pour cela, on note $V_{\mathbb{P}^2}(F)^{rég}$ l'ensemble des points lisses et $V_{\mathbb{P}^2}(F)^{\text{sing}}$ l'ensemble des points singuliers de $V_{\mathbb{P}^2}(F)$, on considère l'application :*

$$\varphi : V_{\mathbb{P}^2}(F)^{rég} \to \mathbb{P}^2,\ P \mapsto [\partial_X F(P) : \partial_Y F(P) : \partial_Z F(P)]$$

et pour tout $Q = [x:y:z] \in \mathbb{P}^2$, on pose $E_Q := \{[a:b:c] \in \mathbb{P}^2\ :\ ax+by+cz = 0\}$. Justifier que $\varphi(V_{\mathbb{P}^2}(F)^{rég}) \cup \cup_Q E_Q \subsetneq \mathbb{P}^2$ où Q décrit l'ensemble fini $V_{\mathbb{P}^2}(F,G) \cup V_{\mathbb{P}^2}(F)^{\text{sing}}$).

Exercice 4 On suppose que k est de caractéristique nulle. Soient $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ deux courbes de degrés $d_1, d_2 \geq 2$ (éventuellement réductibles) qui s'intersectent exactement en $d_1 d_2$ points distincts $P_1, ..., P_{d_1 d_2}$. Soit $C \subseteq \mathbb{P}^2$ une courbe de degré $d_1 + d_2 - 3$ qui contient $P_2, ..., P_{d_1 d_2}$. Montrer que C contient aussi P_1 en suivant les étapes ci-dessous :

a) Montrer que P_1 est un point lisse de C_2.

b) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de tangentes à C_2 qui passent par P_1.

c) En déduire qu'il existe une droite D qui intersecte C_2 en d_2 points distincts et telle que $D \cap C_1 \cap C_2 = \{P_1\}$.

d) Soient $\lambda \in k[X,Y,Z]_1$ une équation de D, $F, F_1, F_2 \in k[X,Y,Z]$ homogènes tels que $(F) = I(C)$ et $(F_i) = I(C_i)$. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que $\lambda F = AF_1 + BF_2$ pour certains polynômes homogènes $A, B \in k[X,Y,Z]$ de degrés $d_2 - 2$, $d_1 - 2$.

e) Montrer que D est une composante de $V_{\mathbb{P}^2}(A)$ et conclure.