Géométrie algébrique élémentaire

Examen Final
mardi 14 mai 2013
Durée : 3 heures
Documents autorisés

Si $h \in \mathbb{C}[T_1, ..., T_n]$, on notera $h_{T_i} := \partial_{T_i} h$ et $h_{T_iT_j} := \partial^2 h/\partial_{T_i}\partial_{T_j}$.

Exercice 1 Si $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ est un polynôme homogène, on pose

$$H_F := \begin{vmatrix} F_{XX} & F_{XY} & F_{XZ} \\ F_{YX} & F_{YY} & F_{YZ} \\ F_{ZX} & F_{ZY} & F_{ZZ} \end{vmatrix} .$$

En particulier, si F est de degré $d \geq 2$, le polynôme homogène H_F, s'il est non nul, est de degré $3(d-2)$.

Soit C une courbe $\subseteq \mathbb{P}^2$. Soit F un générateur de $I(C) \leq \mathbb{C}[X,Y,Z]$. *On dit que $[a:b:c] \in C$ est un point d'inflexion de la courbe C si $[a:b:c]$ est un point lisse de C et si $H_F(a,b,c) = 0$.*

1.1) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Montrer que la courbe affine plane d'équation :

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

est irréductible. On note C sa complétion projective dans $\mathbb{P}^2$. Donner une équation F de C et montrer que C est lisse. Déterminer l'unique point à l'infini de C et montrer que c'est un point d'inflexion. Montrer que la courbe C a exactement 9 points d'inflexions.

1.2) On suppose que $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ est un polynôme homogène de degré $d > 1$. On note L_1, L_2, L_3 les lignes du déterminant qui définit H_F. Montrer que :

$$XL_1 + YL_2 + ZL_3 = (d-1)(F_X, F_Y, F_Z)$$

en déduire que :

$$(1) \qquad Z^2 H_F = (d-1)^2 \begin{vmatrix} F_{XX} & F_{XY} & F_X \\ F_{YX} & F_{YY} & F_Y \\ F_X & F_Y & dF/(d-1) \end{vmatrix}$$

On *admettra* que si $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ est une application $\mathbb{C}-$linéaire, alors :

$$H_{F\circ T} = (\text{dét}\, T)^2 H_F \circ T \ .$$

Si $x_0 \in \mathbb{A}^2$, $p, q \in \mathbb{C}[X,Y]$, on note (p,q) l'idéal engendré par p, q dans $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^2, x_0}$, l'anneau des fonctions régulières au voisinage de x_0, et :

$$I_{x_0}(p,q) := \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathbb{A}^2,x_0}/(p,q) \ .$$

1.3) Soit $P := [0:0:1], O := (0,0)$. On note $f(X,Y) := F(X,Y,1)$, $h(X,Y) := H_F(X,Y,1)$. En utilisant la formule (1), montrer que $I_O(f,h) = I_O(f,g)$ où $g := f_y^2 f_{xx} + f_x^2 f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy}$.
On note $C \subseteq \mathbb{P}^2$ la courbe définie par F.

1.4) Montrer que si P est un point singulier de C, alors $I_O(f,h) \geq 2$.

1.5) On suppose que P est un point lisse de C et que $f_x(0,0) = 0$. Montrer que, à multiplication par une constante près,

$$f = y + ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + py^3 + qx^2y + rxy^2 + \text{des monômes de degrés} \geq 4.$$

Vérifier que

$$g = 2a + 6dx + ty + \text{des monômes de degrés} > 1,$$

pour un certain $t \in \mathbb{C}$.
En déduire que $I_O(f,h) > 0 \Leftrightarrow a = 0$, $I_O(f,h) = 1 \Leftrightarrow a = 0$ et $d \neq 0$.
Si $F_1, F_2 \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ sont des polynômes homogènes de degrés d_1, d_2, si $P \in \mathbb{P}^2$, on pose :

$$I_P(F_1,F_2) := \dim \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2,P}/(F_{1,*}, F_{2,*})$$

où $F_{i,*} := F_i/L_i^{d_i}$ pour certaines formes linéaires L_i non nulles en P.
Si $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ sont des courbes projectives irréductibles, on note :

$$I_P(C_1,C_2) := I_P(F_1,F_2)$$

où $F_i \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ est un générateur homogène de l'idéal $I(C_i)$ (pour $i = 1,2$).

1.6) Soit $P \in C$ un point lisse, donner une équation linéaire de la tangente $T_P C$ (vue comme droite projective de $\mathbb{P}^2$) en fonction de $F_X(P), F_Y(P), F_Z(P)$.

1.7) Montrer que si $P \in C$, alors :

$$H_F(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P \text{ est un point singulier} \\ \text{ou} \\ P \text{ est un point lisse et } I_P(C, T_P C) \geq 3 \end{cases}$$

(indication : traiter d'abord le cas où $P = [0:0:1]$ et $f_x(0,0) = 0$, puis se ramener à ce cas par un changement linéaire de variables)

On dit qu'un point d'inflexion P de C est *ordinaire* si $I_P(C, T_P C) = 3$.

1.8) Montrer qu'une courbe $C \subseteq \mathbb{P}^2$ lisse et irréductible de degré > 2 a toujours au moins un point d'inflexion.

1.9) Soit $C \subseteq \mathbb{P}^2$ une cubique irréductible. On suppose que $P := [0:0:1]$ est un point d'inflexion de C et que la tangente $T_P C$ a pour équation $y = 0$ (on note $[x:y:z]$ les coordonnées des points de $\mathbb{P}^2$). En utilisant la question 5), montrer qu'à une constante multiplicative près, le générateur F de $I(C)$ est de la forme :

$$F = Z^2 Y + bXYZ + cY^2 Z \bmod \mathbb{C}[X, Y] \ .$$

pour certains $b, c \in \mathbb{C}$. Justifier l'existence d'un changement projectif de coordonnées qui transforme F en un polynôme homogène de la forme :

$$Z^2 Y - \text{une forme cubique en } X, Y$$

(indication : considérer $Z \mapsto Z - b/2X - c/2Y$).

1.10) Déduire de la question précédente que toute courbe projective plane, irréductible et cubique est projectivement équivalente à une courbe d'une des équations suivantes :

$$Z^2 Y = X^3,\ Z^2 Y = X^2(X - Y),\ Z^2 Y = X(X - Y)(X - \lambda Y),\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

1.11) En déduire qu'une cubique lisse irréductible a 9 points d'inflexions, tous ordinaires *(indication : on pourra utiliser la question 1)).*

Exercice 2 Soit T l'adhérence de $\{[1 : t : t^2 : t^3] \ : \ t \in \mathbb{C}\}$ dans $\mathbb{P}^3$.

2.1) On considère le morphisme :

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3,\ [s:t] \mapsto [s^3 : s^2 t : st^2 : t^3] \ .$$

Montrer que $f(\mathbb{P}^1) = T$ *(indication : on rappelle (ou on admet) que l'image de f est fermée).*

2.2) On pose :

$$Q_1 := \{[x:y:z:w] \ : \ xz = y^2\},$$
$$Q_2 := \{[x:y:z:w] \ : \ xw = yz\},$$
$$Q_3 := \{[x:y:z:w] \ : \ yw = z^2\} \ .$$

Montrer que $T = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ mais que $T \neq Q_1 \cap Q_2$.

2.3) Soit $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z, W]$ un polynôme homogène. Montrer que :

$$F = A(X, W) + YB(X, W) + ZC(X, W) \bmod (XZ - Y^2, XW - YZ, YW - Z^2)$$

pour certains polynômes homogènes A, B, C *(indication : montrer que le sous-espace des polynômes de la forme $A(X, W) + YB(X, W) + ZC(X, W) + D(X, Y, Z, W)$ avec $D \in (XZ - Y^2, XW - YZ, YW - Z^2)$ est stable par multiplication par X, Y, Z, W).*

2.4) En déduire que $I(T) = (XZ - Y^2, XW - YZ, YW - Z^2)$.

2.5) Montrer que $T \cap \{[0:y:z:w] \ : \ y, z, w \in \mathbb{C}\} = \{[0:0:0:1]\}$.

2.6) Montrer que si l est une forme linéaire qui s'annule sur T, alors $l = 0$.

2.7) En déduire que tout système de générateurs de $I(T)$ contient au moins 3 éléments.

2.8) On pose $H_1 := \{[x:y:z:w] \ : \ y^2 = xz\}$, $H_2 := \{[x:y:z:w] \ : \ z^3 + xw^2 = 2yzw\}$. Montrer que $T = H_1 \cap H_2$.
