Corrigé du partiel du 12 novembre 2012

(durée : 2h30)

Soit k un corps algébriquement clos. Soit $G = \mathrm{SL}_2(k)$. Soient :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} : x \in k^\times, y \in k \right\}, U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : y \in k \right\} .$$

1) Soient :

$$b_1 := \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & x_1^{-1} \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & x_2^{-1} \end{pmatrix} .$$

On a :

$$b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où :

$$z = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_1 x_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) .$$

Donc $(B, B) \subseteq U$. Réciproquement, si $u = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$, alors $u = b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1}$ avec $x_1 = 1, y_2 = 0, x_2 \neq \pm 1$ et $y_1 := y/(1 - x_2^2)$. Donc $(B, B) = U$. Il est clair que $U \subseteq B_u$. Si $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in B_u$, alors $g - 1$ est nilpotent donc $x = 1$et $g \in U$.

2) Soit $\chi : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ un caractère. On a $\chi \in k[\mathbb{G}_m] = k[T, T^{-1}]$ donc $\chi = \sum_n a_n T^n$. On a :

$$\chi(TT') = \chi(T)\chi(T') \Leftrightarrow \sum_n a_n T^n T'^n = \sum_{m,n} a_m a_n T^m T'^n .$$

En particulier, il n'existe pas $m \neq n$ tels que $a_m a_n \neq 0$. Donc $\chi = aT^n$ pour un $n \in \mathbb{Z}$ et un $a \in k$. On a alors $a = 1$ car $\chi(1) = 1$.

3) Soit $\chi : B \to \mathbb{G}_m$ un caractère. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall\, x \neq 0,\ \chi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = x^m .$$

Or si $g \in U$, $\chi(g) = 1$ car 1 est le seuml élément unipotent de $\mathbb{G}_m$. Or $\forall\, x \in k^\times, \forall\, y \in k$,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \bmod U$$

donc :

$$\chi \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = x^m .$$

4) Soit $f \in V_m$. Si $g, x \in G$, si $b \in B$, alors :

$$\gamma(g)f(xb) = f(g^{-1}xb) = \chi_m(b)f(g^{-1}x) = \chi_m(b)\gamma(g)f(x)$$

donc $\gamma(g)f \in V_m$

5) Soit $F \in k[T_0, T_1]$. Soient $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in B$, $\begin{pmatrix} t_0 & t_2 \\ t_1 & t_3 \end{pmatrix} \in G$. On a :

$$\psi^*(F)(gb) = F(gb(e_1)) = F(t_0x, t_1x) = x^m F(t_0, t_1 == x^m \psi^* F(g) \ .$$

Donc $\psi^* F \in V_m$.

On a : $f_i \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x^i z^{m-i}$.

6) On a :

$$\forall x \in k^\times, \, \gamma \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} f_i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f_i \begin{pmatrix} ax^{-1} & bx^{-1} \\ cx & dx \end{pmatrix} = (ax^{-1})^i (cx)^{m-i} = x^{m-2i} a^i c^{m-i}$$

donc $\gamma \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} f_i = x^{m-2i} f_i$.

De même on a :

$$\forall \, y \in k, \, \gamma \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

$$= f_i \begin{pmatrix} a - cy & b - dy \\ c & d \end{pmatrix} = (a - cy)^i c^{m-i}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} y^{i-j} a^i c^{m-i}$$

donc :

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} y^{i-j} f_j \ .$$

7) Soit n_0 la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient :

$$u := \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U, \, b := \begin{pmatrix} x & a \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in B \ .$$

Alors :

$$un_0b = \begin{pmatrix} xy & ay - x^{-1} \\ x & a \end{pmatrix} \in G \setminus B$$

car $x \neq 0$. Réciproquement, si :

$$g = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \in G \setminus B$$

, alors $Z \neq 0$ et $XT - YZ = 1$ donc : $g = un_ob$ avec $a = T$, $y = X/Z$, $x = Z$.

Comme B est fermé dans G, $Un_0B = G \setminus B$ est ouvert.

8) Soit $f \in V_m$, soit $h \in k[T](\simeq k[U])$ tel que pour tout $y \in k$:

$$h(y) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} n_0\right) \ .$$

Alors si $z \neq 0$, on a :

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & x/z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} n_0 \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\right) = z^m h(x/z) \ .$$

9) La fonction : $\mathbb{A}^1 \to k$, $z \mapsto f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = z^m h(1/z)$ est régulière donc est un polynôme en z. Forcément, $\deg h \leq m$. En particulier, si $m < 0$, $h = 0 \Rightarrow f = 0$. Donc $V_m = 0$. Si $m = 0$, forcément, $\deg h = 0$ et f est constante. Donc $V_0 = k$. Si $m > 0$, il existe un polynôme F homogène de degré m tel que :

$$F(x, z) = z^m h(x/z)$$

pour tout $z \in k^\times, x \in k$. On a donc $\psi^* F = f$ sur l'ouvert Un_0B. Comme G est connexe, cet ouvert est dense et $\psi^* F = f$. En particulier, $f \in \mathrm{Vect}\{f_0, ..., f_m\}$. Or, les f_i sont clairement linéairement indépendants (par exemple parce que ψ est dominant et donc ψ^* est injectif). Ainsi, si $m \geq 0$, les f_i forment une base de V_m.

10) Soit $m \geq 0$; soit $f \in V_m^U$. Alors si $u \in U$, $b \in B$, on a :

$$f(un_0b) = \gamma(u^{-1}) f(n_0b) = f(n_0b) = \chi_m(b) f(n_0) \ .$$

Or, $\chi_m(b) = f_0(un_0b)$. Donc $f = f(n_0)f_0$ car ces deux fonctions coïncident sur l'ouvert U_n0B.

11) Soit $m \geq 0$. Soit $L \leq V_m$ un sous-espace $G-$stable. Soit ϕ le morphisme de groupes algébriques : $U \to \mathrm{GL}(L)$, $u \mapsto \gamma(u)|_L$. Comme $\phi(U)$ est un sous-groupe unipotent, il est conjugué à un sous-groupe du groupe

$$U(L) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots \ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(L) \right\}$$

en particulier, il existe un vecteur non nul de V_m laissé fixe par U. Forcément ce vecteur c'et f_0 (à multiplication par un scalaire nonul près). Donc L contient : L_m le sous-espace de V_m engendré par les :

$$\gamma(g)(f_0),\ g \in G\ .$$

On en déduit que L_m est irréductible et que c'est le seul $G-$module irréductible de V_m.

12) Soit $m \geq 0$. Le $G-$module L_m admet une base formée de $T-$vecteurs propres où T est le tore $\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} : x \in k^\times \right\}$. Comme les $T-$vecteurs propres de V_m sont les f_i, L_m admet une base formée de certains f_i.
Or, pour tout $y \in k$,

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix} f_0 = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} y^j f_j \in L_m\ .$$

Si k est de caractéristique 0 ou $p > m$, alors tous les $\binom{m}{j}$ sont non nuls dans k et donc tous les f_j, $0 \leq j \leq m$ sont dans L_m et $V_m = L_m$ est donc irréductible.

13) Si k est de caractéristique p, on a $L_p = kf_0 + kf_p$

14) Soit $r : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation rationnelle de dimension finie. Soit V' le dual de V. On pose pour tout $g \in G$ et tout $\lambda \in V'$ et tout $v \in V$:

$$(r'(g)\lambda)(v) := \lambda(r(g^{-1})v)\ .$$

Soit $v_1, ..., v_n$ une base de V. Si $(r_{i,j})$ est la matrice de $r(g)$ dans cette base, alors dans la base duale $v_1^*, ..., v_n$, $r'(g)$ a pour matrice :

$$^t(r_{i,j})^{-1}\ .$$

donc le morphisme : $G \to \mathrm{GL}(V')$, $g \mapsto r'(g) = {}^t(r_{i,j})^{-1}$ est bien un morphisme de groupes algébriques, *i.e.* r' est bien représentation rationnelle de G.

15) D'après le théorème de Lie-Kolchin appliqué au groupe $r(B)$ qui est bien connexe et résoluble, il existe un vecteur propre commun à tous les $r(g)$, $g \in B$ *i.e.* : il existe $0 \neq v \in V$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in B,\ r \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} v = x^m v\ .$$

On définit alors l'application $k-$linéaire : $\phi : V' \to k[G]$ telle que

$$\forall\, \lambda \in V',\ \forall\, g \in G,\ \phi(\lambda)(g) = \lambda(r(g)v)\ .$$

16) Soient $\lambda \in V'$, $g \in G$, $b \in B$. On a :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda)(gb) = \lambda(r(gb)v) &= \lambda(r(g)r(b)v) \\ &= \chi_m(b)\lambda(r(g)v) \\ &= \chi_m(b)\phi(\lambda)(g) \end{aligned}$$

donc : $\phi(\lambda) \in V_m$.

17) Si r est une représentation irréductible et si $\lambda \in \ker \phi$, alors $\forall g \in G$, $r(g)v \in \ker \lambda$. Or le sous-espace de V engendré par les $r(g)v$ est un sous-espace $G-$stable de V non nul. Comme V est irréductible, c'est V tout entier et $V \subseteq \ker \lambda$ *i.e.* $\lambda = 0$. Donc ϕ est injective. Mais alors $\mathrm{Im}\, \phi \subseteq V_m \Rightarrow V_m \neq 0$ donc $m \geq 0$.

18) Si r est une représentation irréductible, si $W \subseteq V'$ est un sous-espace $G-$stable non nul, alors $W^\circ := \{v \in V \ : \ \forall\, \lambda \in W, \lambda(v) = 0\}$ est un sous-espace $G-$stable de V de dimension $\dim V - \dim W < \dim V$. Comme V est irréductible, $W^\circ = 0$ *i.e.* $W = V'$. Donc V' aussi est irréductible. Donc $V'' = V$ est isomorphe à L_m pour un certain $m \geq 0$.