Corrigé de l'examen final du lundi 7 janvier 2013

Exercice 1

Toutes les formes quadratiques sont équivalentes donc $SO_{2n} \simeq SO(q)$. Or $T := \{\mathrm{diag}(t_1, t_1^{-1}, ..., t_n, t_n^{-1}) \ : \ \forall\, i,\, t_i \in k^\times\}$ est un tore de $SO(q)$ qui est maximal car $Z_{SO(q)}(T) = Z_{\mathrm{GL}_{2n}}T \cap SO(q) = \{$ matrices diagonales $\} \cap \mathrm{SO}(q) = T$. Donc $\mathrm{SO}(q)$ et SO_{2n} sont de rang n.

Exercice 2

a) Si $0 \neq v \in V$, alors $G.v = V \setminus \{0\}$ donc V est irréductible.

b) Les vecteurs e_i sont des vecteurs propres donc les poids de T dans V sont : $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ où $\epsilon_i : \mathrm{diag}(t_1, ..., t_n) \mapsto t_i$.
Le seul vecteur propre de B est e_1 donc ϵ_1 est le plus haut poids de V.

c) On a $P \geq B^-$ donc P est parabolique. De plus $P = \left\{ \begin{pmatrix} \times & ... & \times & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \times & ... & \times & 0 \\ \times & .. & \times & \times \end{pmatrix} \right\}$

donc $\dim P = n^2 - n + 1$.

d) Soit B^- le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires inférieures.
Soit $\omega \in X^*(P)$ tel que $\forall\, p \in P$, $p.e_n = \omega^{-1}(p)e_n$. Pour tout entier $r \geq 0$, on pose :

$$H^0(r\omega) := \{f \in k[G] \ : \ \forall\, g \in G, \forall\, b \in B^-,\ f(gb) = \omega^{-r}(b)f(g)\} \ .$$

Comme B^- est un sous-groupe de Borel de P, P/B^- est projective donc $k[P/B^-] = k$.
Soit $f \in H^0(r\omega)$. On a : $\forall\, g \in G$, $p \mapsto \omega^r(p)f(gp) \in k[P/B^-] = k$ donc $\forall\, g \in G, \forall\, p \in P$, $f(gp) = \omega^{-r}(p)f(g)\}$.

e) L'inverse est donné par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & x_i \\ \vdots & & \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & x_n \end{pmatrix} \bmod H$$

si $x_i \neq 0$ (c'est bien défini car H est le stabilisateur de e_n).

f) Soit $r \geq 0$. L'application linéaire $k[V] \to k[G]$, $f \mapsto (g \mapsto f(g.e_n))$ est injective, $G-$équivariante et envoie S_r dans $H^0(r\omega)$. L'image de S_r est $H^0(r\omega)$ car si $F \in H^0(r\omega)$, alors $\overline{F} : g \bmod H \mapsto F(g) \in k[G/H]$ et si on note $\phi : G/H \overset{\simeq}{\to} V \setminus \{0\}$, $g \bmod H \mapsto g.e_n$, on a : $F(g) = \overline{F}\phi^{-1}(g.e_n)$ et $\overline{F}\phi^{-1} \in k[V \setminus \{0\}] = k[V]$ (car $\dim V \geq 2$).

g) On a $X_n^r \in S_r^U$. Si $P \in S_r^U$, alors $P(x_1, .., x_i + tx_n, ..., x_n) = P(x_1, ..., x_n)$ pour tpout $t \in k$ et tout $i < n$. Donc P ne dépend que de X_n et comme P est homogène de degré r, $P \in kX_n^r$. On en déduit que $S_r^U = kX_n^r$ et $H^0(r\omega)^U = kF$ où $F(g) = g_{n,n}^r$. De plus, F et X_n^r sont de poids $r\omega$.

Tout sous-$G-$module de $H^0(r\omega)$ non nul contient un vecteur $U-$stable donc le sous-$G-$module de plus haut poids $r\omega$ est engendré par F.

Exercice 3

a) $Bn_wB = UTn_wB = Un_wn_w^{-1}Tn_wB = Un_wB$.

b) $P_\sigma \in T \Leftrightarrow \sigma = \mathrm{Id}$ d'où l'injectivité. Si $P \in N_GT$, P est monomiale donc il existe $t_1, ..., t_n \in k^\times$ tels que $P = (t_j\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} = P_\sigma \bmod T$: d'où la surjectivité.

Si $G = \mathrm{GL}_n, B = B_n, T = D_n$, alors $\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \ : \ 1 \leq i \leq n-1\}$ et $\forall\, i,\ s_{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}} = (i, i+1)$.

c) Surjectivité : soit $V \in X$, soit v_1 une base de V_1, v_1, v_2 une base de V_2, ..., $v_1, ..., v_n$ une base de k^n. Il existe $g \in \mathrm{GL}_n$ tel que $ge_i = v_i$ pour tout i. Injectivité : soient $g, g' \in G$, tels que $\forall\, i$, $\mathrm{vect}\{g.e_1, .., g.e_i\} = \mathrm{vect}\{g'.e_1, ..., g'.e_i\}$. Alors $\forall\, i$, $\mathrm{vect}\{g^{-1}g'.e_1, .., g^{-1}g'.e_i\} = \mathrm{vect}\{e_1, .., e_i\}$. Donc $g'^{-1}g \in B$ *i.e.* $g = g' \bmod B$

d) $C(w)$ est une $B-$orbite donc est localement fermé. $\pi^{-1}\mathscr{X}(w)$ est l'image réciproque de $C(w)$ dans G par le morphisme $g \mapsto g^{-1}F(g)$ donc $\pi^{-1}\mathscr{X}(w)$ est localement fermé dans G et $\mathscr{X}(w) = \pi\pi^{-1}\mathscr{X}(w)$ est localement fermé dans G/B.

Soit $V \in X$ tel que $\forall\, i$, $V_i = \mathrm{vect}\{v, .., F^{i-1}v\}$, $1 \leq i \leq n$, avec $V_n = k^n$, pour un certain $v \in V$. Soit $g \in \mathrm{GL}_n$ tel que $ge_i = F^{i-1}v$ pour tout i. Alors, $\forall\, i$, $F(g.e_i) = F(g).e_i = g.e_{i+1}$. Donc, $\forall\, i$, $g^{-1}F(g)e_i = n_w.e_i$. D'où : $n_w^{-1}g^{-1}F(g) \in B \Rightarrow g^{-1}F(g) \in Bn_w \leq Bn_wB = C(w)$.

Réciproquement si $g^{-1}F(g) \in C(w)$, il existe $b_1, b_2 \in B$ tels que $g^{-1}F(g) = b_1n_wb_2$. Donc :

$$\forall\, i,\ \mathrm{vect}\{F(g)e_1, ..., F(g)e_i\} = \mathrm{vect}\{gb_1.e_2, ..., gb_1.e_{i+1}\}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, i,\ \mathrm{vect}\{F(gb_1.e_1), ..., F(gb_1.e_i)\} = \mathrm{vect}\{gb_1.e_2, ..., gb_1.e_{i+1}\}$$

d'où si on pose $\forall\, i,\ v_i := gb_1.e_i$, on a :

$$\forall\, i,\ \mathrm{vect}\{v_2, ..., v_{i+1}\} = \mathrm{vect}\{F(v_1), ..., F(v_i)\}\ .$$

On en déduit par récurrence que $\forall i,\ V_i := \mathrm{vect}\{v_1, ..., v_i\} = \mathrm{vect}\{v_1, ..., F^{i-1}v_1\}$. Remarquons que dans $\mathbb{P}^{n-1}$, $[v_1] = [g.e_1]$. On a donc deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre :

$$\mathscr{X}(w) \longleftrightarrow \left\{ [x_1 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^{n-1} \ :\ \begin{vmatrix} x_1 & ... & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{q^{n-1}} & ... & x_n^{q^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \right\}$$

$$V \longmapsto V_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & ... & x_1^{q^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & ... & x_n^{q^{n-1}} \end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid [x_1 : ... : x_n]$$

e) Si $w \in W$ et $\alpha \in R$, $\mathrm{Ad}(n_w)(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{w(\alpha)} \neq 0$ donc $w(\alpha) \in R$.

f) Supposons $w(\alpha) > 0$. Alors $ws_\alpha(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha \in R(ws_\alpha)$. De plus $\beta \in R(w) \Rightarrow \beta \in R^+\backslash\{\alpha\} \Rightarrow s_\alpha(\beta) \in R^+ \Rightarrow s_\alpha(\beta) \in R(ws_\alpha)$ car $ws_\alpha s_\alpha(\beta) = w(\beta)$. Donc $s_\alpha(R(w)) \cup \alpha \subseteq R(ws_\alpha)$. Réciproquement, si $\beta \in R(ws_\alpha)$, alors $\beta = \alpha$ ou $\beta \in s_\alpha(R^+ \setminus \alpha) \Rightarrow s_\alpha\beta \in R(w)$; or $\beta = s_\alpha s_\alpha(\beta)$.
Si $w(\alpha) < 0$, alors $ws_\alpha(\alpha) > 0 \Rightarrow R(w) = s_\alpha(R(ws_\alpha)) \cup \alpha \Rightarrow s_\alpha(R(ws_\alpha)) = R(w) \setminus \alpha \Rightarrow R(ws_\alpha) = s_\alpha(R(w) \setminus \alpha)$.

g) Si $h = 1$: facile. Par hypothèse de récurrence, on a : $R(s_1...s_{h-1}) = \{\alpha_{h-1}, s_{h-1}\alpha_{h-2}, ..., s_{h-1}...s_2\alpha_1\}$. Or $\alpha_h \notin \{\alpha_{h-1}, s_{h-1}\alpha_{h-2}, ..., s_{h-1}...s_2\alpha_1\}$ sinon : d'une part $s_1..s_{h-1}(\alpha_h) < 0$ et d'autre part : $\exists\, 2 \leq i \leq h-1$, $\alpha_h = s_h...s_i\alpha_{i-1} \Rightarrow s_i...s_h\alpha_h = \alpha_{i-1} \Rightarrow s_1...s_h\alpha_h = -s_1...s_{h-1}\alpha_h = s_1...s_{i-1}\alpha_{i-1} = -s_1...s_{i-2}\alpha_{i-1} < 0$ *absurde*.
Donc $R(s_1...s_h) = s_h R(s_1...s_{h-1}) \cup \alpha_h$.
On a donc $l(w) = h = |R(w)|$.

h) $u_1(x_1)n_1...u_h(x_h)n_h = u_1(x_1) \underbrace{n_1u_2(x_2)n_1^{-1}}_{\in U_{s_1(\alpha_2)}} ... \underbrace{(n_1...n_{h-1})u_h(x_h)(n_1...n_{h-1})^{-1}}_{\in U_{s_1 ... s_{h-1}(\alpha_h)}} n_1...n_h.$

Or $R(w^{-1}) = \{\alpha_1, ..., s_1...s_{h-1}(\alpha_h)\}$ donc $u_1(x_1)n_1...u_h(x_h)n_h = un_w \bmod B$ où $u = u_1(x_1)n_1u_2(x_2)n_1^{-1}...(n_1...n_{h-1})u_h(x_h)(n_1...n_{h-1})^{-1} \in U \cap n_wU^-n_w^{-1})$.
Injectivité : si $\Phi(x_1, ..., x_h) = \Phi(x'_1, ..., x'_h)$, alors si on pose

$$u' := u_1(x'_1)n_1u_2(x'_2)n_1^{-1}...(n_1...n_{h-1})u_h(x'_h)(n_1...n_{h-1})^{-1} ,$$

on a : $n_w^{-1}(u'^{-1}u)n_w \in U^- \cap B = 1$ donc $(x_1, ..., x_h) = (x'_1, ..., x'_h)$.
Surjectivité : $X_w = Un_wB/B = U \cap n_WU^-n_w^{-1}.U \cap n_wUn_w^{-1}n_wB/B = U \cap n_WU^-n_w^{-1}n_wB/B = U_{\alpha_1}n_1U_{\alpha_2}...U_{\alpha_h}n_hB/B$.
Φ est bijective. De plus $d\Phi|_0 : T_0\mathbb{A}^h \to T_{n_w}X_w$, $(\xi_1, ..., \xi_h) \mapsto du_{\alpha_1}(\xi_1) + ... + \mathrm{Ad}(n_{h-1}du_{\alpha_h}(\xi_h) \in \mathfrak{g}_{\alpha_1}plus... \oplus \mathfrak{g}_{s_1...s_{h-1}(\alpha_h)}$ est injective donc surjective (car $\dim X_w = h$ et X_w est lisse (c'est une $B-$orbite)). Donc Φ est séparable. Φ est donc un isomorphisme par le théorème principal de Zariski.
Si $G = \mathrm{GL}_n, B = B_n, T = D_n, w = (1...n)$, alors $l(w) = |R(w)| = |\{\epsilon_i - \epsilon_n : 1 \le i \le n-1\}| = n-1$. Donc $\dim C(w) = \dim B + \dim X_w = n(n-1)/2 + n - 1$.

i) $B \cup C(s_\alpha)$ est stable par produit et par inversion : c'est un sous-groupe de G. De plus $n_\alpha \in C(s_\alpha)$ donc $B, n_\alpha U_\alpha n_\alpha^{-1} = U_{-\alpha} \le B \cup C(s_\alpha) \Rightarrow P_\alpha \le B \cup Bn_\alpha B$. D'un autre côté, $n_\alpha \in G_\alpha \le P_\alpha \Rightarrow B \cup C(s_\alpha) \le P_\alpha$. Comme B est fermé, $P_\alpha \setminus B = C(s_\alpha)$ est un ouvert dense de P_α et $\dim P_\alpha = \dim C(s_\alpha) = \dim B + l(s_\alpha) = \dim B + 1$.

j) Soient $\pi_P : G \to G/P$ et $\pi_Q : G \to G/Q$. Le morphisme π_P est ouvert. Comme $XP = X$, $\pi_P(X)$ est fermé dans G/P. Or $f : G/P \to G/Q$ est fermé car G/P est complète ; donc $XQ = \pi_Q^{-1}f(\pi_PX)$ est fermé dans G.

k) on applique la question précédente à $X = P_1...P_{h-1}$, $P = B, Q = P_h$.

l) $P_1...P_h$ est $B \times B-$stable : c'est donc une union de $B \times B-$orbites. Ona $P_1...P_h = (B \cup Bs_1B)...(B \cup Bs_hB) \subseteq \cup_{w' \in S_w} C(w')$.
Or $w' \in S_w \Rightarrow l(w') \le h = l(w)$.

m) $P_1...P_h \subseteq \cup_{w' \in S_w} C(w')$. D'un autre côté, on a :

$$w' \in S_w \Rightarrow C(w') \subseteq \cup_{1 \le i_1 < ... < i_m \le h} C(s_{i_1})...C(s_{i_m})$$

$$\subseteq \cup_{1 \le i_1 < ... < i_m \le h} P_{i_1}...P_{i_m} \subseteq P_1...P_h \; .$$

n) Comme $P_1...P_h$ est fermé, $\overline{C(w)} \subseteq P_1...P_h$. Réciproquement soit $p : G^h \to G$, $(x_1, ..., x_h) \mapsto x_1...x_h$. On a :

$$p(\overline{C(s_1) \times ... \times C(s_h)}) \subseteq \overline{p(C(s_1) \times ... \times C(s_h))} = \overline{C(s_1)...C(s_h)} = \overline{C(w)}$$

$$\Rightarrow p(\overline{C(s_1)} \times ... \times \overline{C(s_h)}) = p(P_1 \times ... \times P_h) = P_1...P_h \subseteq \overline{C(w)} \; .$$

Comme $\overline{C(w)}B = \overline{C(w)}$, $\pi(\overline{C(w)})$ est fermé. Donc $\pi(\overline{C(w)}) = \overline{X_w} = \cup_{w' \in S_w} X_{w'}$. Par la décomposition de Bruhat, on a :

$$S_w = \{w' \in W \ : \ C(w') \subseteq \overline{C(w)}\} \ .$$

o) $n_w B n_w^{-1}$ est un sous-groupe de Borel de G donc $n_w B n_w^{-1} \cap Z_G((\ker \alpha)^0)$ est un sous-groupe de Borel de G_α. Le stabilisateur de n_w mod B dans G est $n_w B n_w^{-1}$.

p) $U_\alpha \leq B_\alpha \Leftrightarrow U_\alpha \leq n_w B n_w^{-1} \Leftrightarrow n_w^{-1} U_\alpha n_w = U_{w^{-1}(\alpha)} \leq B \Leftrightarrow w^{-1}(\alpha) > 0$.

q) $n_\alpha U n_w B = n_\alpha \prod_{\beta \in R^+ \setminus \alpha} U_\beta U_\alpha n_w B = \prod_{\beta \in R^+ \setminus \alpha} U_{s_\alpha(\beta)} n_\alpha n_w U_{w^{-1}(\alpha)} B \subseteq C(s_\alpha w)$.

r) $G_\alpha / R(G_\alpha)$ est semisimple de rang 1 donc isomorphe à SL_2 ou PGL_2. De plus, $B \cap G_\alpha \geq R(G_\alpha)$ et $(B \cap G_\alpha)/R(G_\alpha)$ est un sous-groupe de Borel de $G_\alpha / R(G_\alpha)$. Donc $G_\alpha/R(G_\alpha) = U_\alpha n_\alpha (G_\alpha \cap B)/R(G_\alpha) \cup U_\alpha (G_\alpha \cap B)/R(G_\alpha)$. Ainsi : $G_\alpha = (G_\alpha \cap B) \cup U_\alpha n_\alpha (G_\alpha \cap B)$.

On a :

$$n_\alpha C(w) = n_\alpha U n_w B = U_{-\alpha} n_\alpha (\prod_{\beta \in R^+ \setminus \alpha} U_\beta) n_\alpha^{-1} n_\alpha n_w B \subseteq U_{-\alpha} C(s_\alpha w) \ .$$

Réciproquement, $U_{-\alpha} C(s_\alpha w) = n_\alpha U_\alpha \underbrace{n_\alpha C(s_\alpha w)}_{\subseteq C(s_\alpha s_\alpha w) = C(w)} \subseteq n_\alpha C(w)$.

Mais, $n_\alpha C(w) \subseteq G_\alpha C(s_\alpha w) \subseteq (G_\alpha \cap B) C(s_\alpha w) \cup U_\alpha \underbrace{n_\alpha (G_\alpha \cap B) C(s_\alpha w)}_{\subseteq C(w)} \subseteq C(s_\alpha w) \cup C(w)$.

Donc $C(s_\alpha w) \subseteq U_{-\alpha} C(s_\alpha w) \subseteq C(s_\alpha) C(w) = B n_\alpha B n_w B \subseteq C(s_\alpha w) \cup C(w) \Rightarrow C(s_\alpha) C(w) = C(s_\alpha w)$ ou $C(s_\alpha w) \cup C(w)$. Or $\dim C(s_\alpha) C(w) \geq \dim C(w) = l(w) + \dim B > l(s_\alpha w) + \dim B = \dim C(s_\alpha w)$. Conclusion : $C(s_\alpha) C(w) = C(s_\alpha w) \cup C(w)$.