Indications pour l'exercice 3 du td II

Soit $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ une matrice unipotente. Alors $\delta(g) : k[\mathrm{GL}_n] \to k[\mathrm{GL}_n]$ est aussi unipotent.

En effet, il existe une matrice P inversible telle que $g = PuP^{-1}$ où u est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $\delta(g) = \delta(P)\delta(u)\delta(P)^{-1}$.

Il suffit donc de traiter le cas où $g = u$.

Dans ce cas, on a pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $m \geq 0$:

$$\delta(u)(T_{i,j}/D^m) = T_{i,j}/D^m + \sum_{1 \leq k < j} u_{k,j} T_{i,k}/D^m$$

où on a noté $D \in k[\mathrm{GL}_n]$ le déterminant.

Pour tout $1 \leq q \leq n$, notons I_q l'idéal de $k[\mathrm{GL}_n]$ engendré par les

$$T_{i,j},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j < q\ ;$$

en particulier, $I_1 = 0$.

On vérifie facilement que pour tout q, $(\delta(u) - \mathrm{Id})(I_q) \subseteq I_{q-1} + I_q I_n$. On en déduit que pour tout $N \geq 1$, on a :

$$(\delta(u) - \mathrm{Id})^N(k[\mathrm{GL}_n]) \subseteq \sum_\alpha I_2^{\alpha_2} ... I_n^{\alpha_n}$$

où $\alpha = (\alpha_2, ..., \alpha_n)$ décrit les $(n-1)-$uplets d'entiers naturels tels que :

$$(n-1)\alpha_2 + (n-2)\alpha_3 + ... + \alpha_n = N\ .$$

Or si $a = (a_{i,j}) \in \mathbb{N}^{n \times n}$, si $m \geq 0$, on a :

$$(\delta(u) - \mathrm{Id})(T^a/D^m) = p/D^m$$

pour un certain polynôme p en les $T_{i,j}$ homogène et de degré $|a| := \sum_{i,j} a_{i,j}$.

Pour chaque d entier, Soit E_d le sous-$k-$espace vectoriel de $k[\mathrm{GL}_n]$ engendré par les T^a/D^m où $m \geq 0$ et $|a| \leq d$. On a pour tout N :

$$(\delta(u) - \mathrm{Id})^N(E_d) \subseteq E_d \cap \sum_\alpha I_2^{\alpha_2} ... I_n^{\alpha_n}$$

où $\alpha = (\alpha_2, ..., \alpha_n)$ décrit les $(n-1)-$uplets d'entiers naturels tels que :

$$(n-1)\alpha_2 + (n-2)\alpha_3 + ... + \alpha_n = N \ .$$

Or un élément de $I_2^{\alpha_2}...I_n^{\alpha_n}$ est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$T^a/D^m$$

avec $m \geq 0$ et $|a| \geq \alpha_2 + ... + \alpha_n$. De plus, on a :

$$\alpha_2 + ... + \alpha_n \geq \frac{(n-1)\alpha_2 + (n-2)\alpha_3 + ... + \alpha_n}{n-1} \ .$$

On en déduit que si $N > (n-1)d$, alors $(\delta(u) - \mathrm{Id})^N(E_d) = 0$.

Comme $k[\mathrm{GL}_n] = \cup_d E_d$, on a bien montré que $\delta(u) - \mathrm{Id}$ est localement nilpotent sur $k[\mathrm{GL}_n]$ *i.e.* $\delta(u)$ est unipotent.