Examen partiel
durée : 2h30

Soit k un corps algébriquement clos. Soit $G = \mathrm{SL}_2(k)$. Soient :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} : x \in k^\times, y \in k \right\}, U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : y \in k \right\} .$$

1) Montrer que $(B, B) = B_u = U$.
2) Si $\chi : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ est un caractère, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{G}_m,\, \chi(t) = t^m \ .$$

3) Si $\chi : B \to \mathbb{G}_m$ est un caractère, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in B,\, \chi \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = x^m \ .$$

On note χ_m le caractère ci-dessus et on pose :

$$V_m := \{ f \in k[G] \ : \forall\, g \in G, \forall\, b \in B,\, f(gb) = \chi_m(b) f(g) \} \ .$$

4) Si $g \in G$, si $f \in k[G]$, on définit $\gamma(g) f \in k[G]$ par :

$$\forall\, x \in G,\, \gamma(g) f(x) := f(g^{-1}x) \ .$$

Vérifier que $\gamma(g)(V_m) \subseteq V_m$ pour tout m. On a donc une représentation rationnelle :

$$\gamma : G \to GL(V_m)$$

pour tout $m \geq 0$.

5) Soit ψ le morphisme :

$$\psi : G \to \mathbb{A}^2,\, g \mapsto g(e_1)$$

où $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note T_0, T_1 les fonctions coordonnées sur $\mathbb{A}^2$. Soit $m \geq 0$. Montrer que si $F \in k[T_0, T_1]$ est un polynôme homogène de degré $m \geq 0$, alors $\psi^* F \in V_m$. Pour tout $0 \leq i \leq m$, on pose :

$$f_i := \psi^*(T_0^i T_1^{m-i}) \in k[G] \ .$$

Déterminer $f_i \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ pour tout $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$.

6) Montrer que si $0 \leq i \leq m$, on a :

$$\forall\, x \in k^\times,\, \gamma \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} f_i = x^{m-2i} f_i$$

$$\forall\, y \in k,\, \gamma \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} y^{i-j} f_j \ .$$

7) Soit n_0 la matrice :
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$
Montrer que Un_0B est un ouvert de G *(indication : montrer que $Un_0B = G \setminus B$).*

8) En déduire que si $f \in V_m$, il existe un polynôme en une variable $h \in k[T]$ tel que :
$$\forall \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G \setminus B,\ f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = z^m h\left(\frac{x}{z}\right) .$$

9) Montrer que si $m < 0$, $V_m = 0$. Montrer que $V_0 = k$. Montrer que si $m \geq 0$, alors $\deg h \leq m$ et que $f_0, ..., f_m$ est une base de V_m.

10) Soit $m \geq 0$; montrer que si $f \in V_m^U$, *i.e.* : $\forall\, g \in U$, $\gamma(g)f = f$, alors $f \in kf_0$.

11) Si $m \geq 0$ on note L_m le sous-espace de V_m engendré par les :
$$\gamma(g)(f_0),\ g \in G .$$
Montrer que L_m est irréductible (*i.e.* $L_m \neq 0$ et si $L \leq L_m$ est un sous-espace $G-$stable (pour la représentation γ), alors $L = 0$ ou L_m). Montrer aussi que L_m est le seul sous-espace $G-$stable et irréductible de V_m.

12) Soit $m \geq 0$. Montrer que si k est de caractéristique 0 ou $p > m$, V_m est irréductible *(indication : par exemple, vérifier d'abord que chaque sous-espace $G-$stable de V_m a une base formée de certains f_i).*

13) Déterminer l'unique sous-espace $G-$stable irréductible de V_p si k est de caractéristique $p > 0$.

14) Soit $r : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation rationnelle de dimension finie. Soit V' le dual de V. On pose pour tout $g \in G$ et tout $\lambda \in V'$ et tout $v \in V$:
$$(r'(g)\lambda)(v) := \lambda(r(g^{-1})v) .$$
Montrer que $r' : G \to \mathrm{GL}(V')$ est encore une représentation rationnelle de G.

15) Montrer qu'il existe $0 \neq v \in V$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$\forall \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in B,\ r\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} v = x^m v .$$
On définit alors l'application $k-$linéaire : $\phi : V' \to k[G]$ telle que
$$\forall\, \lambda \in V',\ \forall\, g \in G,\ \phi(\lambda)(g) = \lambda(r(g)v) .$$

16) Montrer que $\mathrm{Im}\, \phi \subseteq V_m$.

17) Montrer que si r est une représentation irréductible, alors ϕ est injective et $m \geq 0$.

18) Montrer que si r est une représentation irréductible, alors r' aussi. En déduire qu'il existe un unique $m \geq 0$ tel que V soit isomorphe à L_m (par un isomorphisme $G-$équivariant).