XI

Exercice 1 *I) Soit $G := \mathrm{GL}_n$. Soit T le tore des matrices diagonales. Si $1 \leq i \neq j \leq n$, on pose :*

$$\alpha_{i,j}(\mathrm{diag}(t_1, ..., t_n)) := t_i t_j^{-1} \ .$$

a) Montrer que $R(G,T) = \{\alpha_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq n\}$. Vérifier en passant que $G_\alpha / \ker \alpha \simeq \mathrm{PGL}_2$.

b) Montrer que pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$, $\alpha_{i,j}^\vee$ est le morphisme : $\mathbb{G}_m \to G$ qui envoie $t \in k^\times$ sur la matrice diagonale avec t en position (i,i), t^{-1} en position (j,j) et 1 ailleurs.

c) On pose $X = X^\vee = \mathbb{Z}^n$, $R = R^\vee = \{e_i - e_j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n\}$ où e_i est la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. Montrer que $\Psi(G,T) \simeq (X, R, X^\vee, R^\vee)$.

d) Montrer que $R^+ := \{e_i - e_j \ : \ 1 \leq i < j \leq n\}$ est un système de racines positives de base associée : $D = \{e_i - e_{i+1} \ : \ 1 \leq i \leq n-1\}$. Vérifier que l'action du groupe de Weyl sur X induit un isomorphisme $W \simeq \mathfrak{S}_n$.

e) Vérifier que Q n'est pas d'indice fini dans X.

II) Soit $G := \mathrm{SL}_n$. Soit T le tore des matrices diagonales. On pose : $X_1 := X/\mathbb{Z}(e_1 + ... + e_n)$ et $X_1^\vee := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n : x_1 + ... + x_n = 0\}$. On pose R_1 l'image de R dans X_1 et $R_1^\vee := R^\vee$. Vérifier que la donnée radicielle de (G,T) est isomorphe à $(X_1, R_1, X_1^\vee, R_1^\vee)$. Vérifier que G est semisimple et simplement connexe.

III) Soit $G = \mathrm{PGL}_n$. Soit T l'image du tore des matriices diagonales de GL_n dans G. Vérifier que la donnée radicielle de (G,T) est isomorphe à $(X_1^\vee, R_1^\vee, X_1, R_1)$. Vérifier que G est semisimple et adjoint.

IV) Soit $G = \mathrm{Sp}_{2m} = \{g \in \mathrm{GL}_{2m} \ : \ {}^t g J g = J\}$ où J est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$. Soit T le sous-groupe des matrices diagonales de la forme : $\mathrm{diag}(x_1, ..., x_m, x_1^{-1}, ..., x_m^{-1})$.
Montrer que $Z_G T = T$ et en déduire que T est un tore maximal de G. Montrer que le groupe de Weyl est isomorphe à $W = \mathfrak{S}_m \times |\{\pm 1\}^m$. Décrire l'action de W sur $T \simeq \mathbb{G}_m^m$. Montrer que $\Psi(G,T) \simeq (X, R, X^\vee, R^\vee)$ où : $X = X^\vee = \mathbb{Z}^n$, $R := \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n\}$, $R^\vee := \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n\}$. Montrer que $\{2e_i, e_i \pm e_j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n\}$ est un système de racines positives et que $\{e_i - e_{i+1} \ : \ 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{2e_n\}$ est la base associée. Vérifier que G est simplement connexe.

V) *Soit $G = \S 0(q)$ où k est de caractéristique $\neq 2$ et q est la forme quadratique :*

$$q(x_1, ..., x_{2m+1}) = \sum_{i=1}^{m} x_i x_{m+i} + \frac{x_{2m+1}}{2}$$

$m > 2$. On note T le tore des matrices diagonales de G. Montrer que la donnée radicielle est duale de la donnée de Sp_{2m}.

VI) *Soit $G = \S 0(q)$ où k est de caractéristique $\neq 2$ et q est la forme quadratique :*

$$q(x_1, ..., x_{2m+1}) = \sum_{i=1}^{m} x_i x_{m+i}$$

$m > 2$. On note T le tore des matrices diagonales de G. Montrer que $\Psi(G,T)$ est isomorphe à $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ avec $X = X^\vee = \mathbb{Z}^n$, $r = R^\vee = \{\pm e_i \pm e_j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq m\}$. Montrer qu'un système de racines positives est donné par : $\{e_i \pm e_j \ : \ 1 \leq i < j \leq m\}$. Montrer que la base associée est $\{e_i - e_{i+1} \ : \ 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{e_{m-1} + e_m\}$.

Exercice 2 *Soit G un groupe semisimple connexe. Soit T un tore maximal de G. On note R l'ensemble des racines de (G,T).*

a) *Soit G_1 un sous-groupe fermé connexe et distingué de G. Montrer que G_1 est semisimple.*

b) *Soit G_1 le sous-groupe engendré par les U_α, $\alpha \in R$. Montrer que G_1 est distingué dans G (on rappelle que G est engendré par T et les U_α, $\alpha \in R$).*

c) *Montrer que $\bigcap_{\alpha \in R} (\ker \alpha)^0 = e$ et en déduire que le sous-groupe de $X := X^*(T)$ engendré par R est d'indice fini et que T est engendré par les $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$.*

d) *Montrer que si $\alpha \in R$, $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m) \subseteq \langle U_\alpha, U_{-\alpha} \rangle$ (indication : commenser par le cas de PGL_2 et SL_2). En déduire que $T \leq G_1$ que G est engendré par les U_α, $\alpha \in R$.*

e) *Pour tout $\alpha \in R$, montrer qu'il existe un isomorphisme $u_\alpha : \mathbb{G}_a \to U_\alpha$ tel que :*

$$(1) \qquad \forall\, t \in T, \forall\, x \in k,\ t u_\alpha(x) t^{-1} u_\alpha(-x) = u_\alpha((\alpha(t) - 1)x) \ .$$

En déduire que $U_\alpha \subseteq (G,G)$ et que $G = (G,G)$.

f) *Soit G_1 un sous-groupe fermé, connexe et distingué de G. Soit T_1 un tore maximal de G_1 contenu dans T (vérifier que c'est possible). En utilisant (1), montrer que $U_\alpha \not\subseteq G_1 \Leftrightarrow \alpha(T_1) = 1$ (on rappelle que $Z_{G_1} T_1 = T_1$).*

g) *Soient :*

$$R_1 := \{\alpha \in R \ : \ U_\alpha \leq G_1\},\ R_2 : R \setminus R_1 \ .$$

Déduire de la question précédente que $R_1 = \emptyset \Rightarrow T_1 = e \Rightarrow G_1 = e$.

h) *Vérifier que* $R_2 = \emptyset \Rightarrow G_1 = G$.

i) *On suppose que* $R_1, R_2 \neq \emptyset$. *Soient* $\alpha \in R_1$, $\beta \in R_1$. *Soit* $y \in k$ *; on pose :*

$$\forall\, x \in k,\ u(x) := u_\beta(y) u_\alpha(x) u_{-\beta}(-y) \ .$$

Montrer que $u(x) \in G_1$ *et que* $\forall\, t \in T$, $tu(x)t^{-1} = u(\alpha(t)x)$. *En déduire que :* $u(x) = u_\alpha(f(y)x)$ *pour une certain morphisme* $f : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_m$. *Montrer que* f *est constant et que* $(U_\alpha, U_\beta) = e$.

j) *Soit* G_2 *le sous-groupe de* G *engendré par les* U_β, $\beta \in R_2$. *Montrer que* G_2 *est fermé connexe et distingué dans* G, *que* $(G_1, G_2) = e$, $G_1 G_2 = G$ *et que* $G_1 \cap G_2$ *est fini.*

k) *Montrer que l'ensemble des sous-groupes fermé distingués de* G *de dimension* > 0 *minimale est fini ; notons le* $G_1, ..., G_n$. *Montrer que pour tous* $i \neq j$, $(G_i, G_j) = e$ *et* $G_i \cap \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} G_j = e$, $G = G_1 ... G_n$ *et que les* G_i *sont quasisimples.*