II

Exercice 1 *Soient A un anneau intègre et Ω un corps algébriquement clos. Soit $0 \neq P \in A[T]$. Montrer que tout morphisme d'anneau $A \to \Omega$ se prolonge en un morphisme $A[T] \to \Omega$ non nul en P.*

Exercice 2 *Soit G un groupe algébrique. On suppose que $k[G] = k[f_1, ..., f_n]$ où les f_i sont $k-$linéairement indépendants et engendrent un sous-espace de $k[G]$ stable par tous les $\delta(x)$, $x \in G$.*

Soient $a_{i,j} \in k[G]$ tels que pour tous $1 \leq j \leq n$:

$$\mu^* f_j = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_{i,j} \in k[G] \otimes k[G]$$

où μ est la multiplication $G \times G \to G$. Montrer que :

$$G \to \mathrm{GL}_n(k)\,,\; g \mapsto (a_{i,j}(g))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est une immersion fermée.

Exercice 3 *Soit $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ une matrice diagonalisable (respectivement unipotente) montrer que*

$$\delta(g) : k[\mathrm{GL}_n] \to k[\mathrm{GL}_n]$$

est semi-simple (respectivement unipotent). En déduire que si G est un sous-groupe fermé de GL_n, si $g \in G$, alors les composantes semi-simples et unipotentes de g dans G sont les composantes semi-simples et unipotentes de la matrice g (au sens traditionnel).

Exercice 4 *Soit G un groupe algébrique. Soit $g \in G$. On note g_s et g_u ses composantes semi-simples et unipotentes. Montrer que $\gamma(g_s) = \gamma(g)_s$ et $\gamma(g_u) = \gamma(g)_u$.*