III

Exercice 1 *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ où k est algébriquement clos. On suppose que G agit irréductiblement sur k^n.*

a) *On pose $A = \sum_{g\in G} kg \subseteq \mathrm{End}_k(k^n)$. Soit $0 \neq x \in k^n$. Montrer que $Ax = k^n$.*

Soit $f \in \mathrm{End}_k(k^n)$. Soit $E := k^{n\oplus n}$. On pose $x := e_1 \oplus ... \oplus e_n \in E$ où $e_1, ..., e_n$ est une base quelconque de k^n. On considère E comme un $A-$module pour l'action diagonale ($a.(x_1 \oplus ... \oplus x_n) := ax_1 \oplus ... \oplus ax_n$).

b) *Montrer que Ax a un supplémentaire $A-$stable dans E. On considère la projection π sur Ax associée.*

c) *On peut représenter π par une matrice $(\pi_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où les $\pi_{i,j} \in \mathscr{M}_n(k)$. En utilisant que k^n est un $A-$module simple, montrer que pour tous i, j, il existe $t_{i,j} \in k$ tel que $\pi_{i,j} = t_{i,j} I_n$.*

d) *On pose $F : E \to E$, $x_1 \oplus ... \oplus x_n \mapsto f(x_1) \oplus ... \oplus f(x_n)$. L'endomorphisme F peut donc être représenté par une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux égaux à f. Vérifier que $F\pi = \pi F$.*

e) *En déduire qu'il existe $a \in A$ tel que $F(x) = ax$ puis que $f \in A$.*

(Pour une autre démonstration : cf. « Maths en tête » de X.Gourdon, problème 7, chapitre IV).

f) *Vérifier que SO_n agit irréductiblement sur k^n (k de caractéristique $\neq 2$).*

Exercice 2 i) *Soit X une variété algébrique affine. Soit $f : X \to k$ une application telle qu'il existe un recouvrement ouvert :*

$$X = \cup_\alpha U_\alpha$$

pour chaque α des fonctions régulières $a_\alpha, b_\alpha \in k[X]$ telles que pour tout α, pour tout $x \in U_\alpha$, $b_\alpha(x) \neq 0$ et :

$$f(x) = \frac{a_\alpha(x)}{b_\alpha(x)} \ .$$

Montrer que $f \in k[X]$ (indication : se ramener au cas où $U_\alpha = D(b_\alpha)$ pour tout α et vérifier que les b_α^2 engendrent $k[X]$).

ii) *Montrer que $k[\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}] = k[\mathbb{A}^2]$ et que la variété $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas affine.*

iii) *Montrer que $k[\mathbb{P}^1] = k$ et en déduire $\mathbb{P}^1$ n'est pas affine.*

Exercice 3 *Soit B_n le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_n(k)$. On note $e_1, ..., e_n$ la base canonique de k^n et pour tout i : V_i le sous-espace engendré par $e_1, ..., e_i$. En particulier B_n est le sous-groupe des $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ tel que $g(V_i) \subseteq V_i$ pour tout i.*

Montrer que si $g \in D^r(B_n)$, $r \geq 1$, alors $(g - I_n)(V_i) \subseteq V_{i-2^{r-1}}$ pour tout i. En déduire que le groupe B_n est résoluble.