IV

Exercice 1 *Déterminer les algèbres de Lie des groupes* Sp_{2n} *et* SO_n *(en caractéristique* $\neq 2$*) et en déduire leur dimension.*

Exercice 2 (dérivations invariantes à gauche) *a) Soit* $G = \mathbb{G}_a$*. On a* $k[G] = k[\mathbb{G}_a] = k[T]$*. Montrer que* $\mathscr{L}(G) = k\frac{d}{dT}$ *et que* $(d/dT)^p = 0$ *si* k *est de caractéristique* $p > 0$*.*

b) Soit $G = \mathbb{G}_m$*. On a :* $k[G] = k[T, T^{-1}]$*. Montrer que* $\mathscr{L}(G) = kT\frac{d}{dT}$ *et que* $(Td/dT)^p = Td/dT$ *si* k *est de caractéristique* $p > 0$*.*

c) Soit $G = \mathrm{GL}_n$*. On a :* $k[G] = k[T_{i,j}, \det^{-1}]$*. Notons* $\mathfrak{gl}_n$ *l'algèbre de Lie des matrices* $n \times n$ *avec la* $p-$*opération usuelle si* k *est de caractéristique* $p > 0$*. Si* $X = (x_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n$*, montrer que la dérivation* D_X *définie par :*

$$D_X(T_{i,j}) = -\sum_k T_{i,k}x_{k,j}$$

est dans $\mathscr{L}(G)$*. Vérifier que* $X \mapsto D_X$ *est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Exercice 3 *a) Soit* $W \leq V$ *deux* $k-$*espaces vectoriels de dimension finie. Soit* $g \in \mathrm{GL}(V)$*. On suppose que* $\dim W = d$*. Soit* $e_1, ..., e_d$ *une base de* W*. Montrer que si* $g(e_1)\wedge...\wedge g(e_d)$ *est colinéaire à* $e_1\wedge..\wedge e_d$ *(dans* $\bigwedge^d V$*), alors* $g(W) = W$ *(indication : montrer qu'il existe une base* $v_1, ..., v_n$ *de* V *telle que* $v_1, ..., v_d$ *soit une base de* W *et* $v_i, ..., v_{i+d}$ *une base de* $g(W)$ *pour un certain* i*).*

b) Soit $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ *une représentation rationnelle de dimension finie d'un groupe algébrique* G*. Soit* $d \geq 1$*. Pour tout* $g \in G$ *et tous* $v_1, ..., v_d \in V$*, on pose* $\wedge^d\phi(g)(v_1 \wedge ... \wedge v_d) := g(v_1) \wedge ... \wedge g(v_d)$*. Vérifier que cela définit une représentation rationnelle :*

$$\wedge^d(\phi) : G \to \mathrm{GL}(\wedge^d V) \ .$$

Donner un sens à l'assertion suivante et la vérifier :

$$\forall\, \xi \in \mathfrak{g},\ \forall\ v_1, ..., v_d \in V,$$

$$d(\wedge^d\phi)(\xi)(v_1 \wedge ... \wedge v_d) = \sum_{i=1}^{d} v_1 \wedge ... \wedge (d\phi)(\xi)v_i \wedge ... \wedge v_d \ .$$

c) Soit $\xi \in \mathfrak{g}$*. Montrer que si* $W \leq V$ *est un sous-espace de base* $v_1, ..., v_d$*, si* $\omega := v_1 \wedge ... \wedge v_d$ *est tel que* $d(\wedge^d\phi)(\xi)(\omega) \in k\omega$*, alors* $d\phi(\xi)(W) \subseteq W$*.*

Exercice 4 *Soit G un groupe algébrique. On suppose que les caractères de G forment une base du $k-$espace vectoriel $k[G]$. Montrer que tous les éléments de G sont semisimples et en déduire que toute représentation rationnelle de G est somme directe de représentations de dimension 1.*

Exercice 5 *Soit G un groupe algébrique connexe de dimension 1 sur un corps k de caractéristique $p > 0$. On suppose que G est unipotent. L'objectif est de montrer que $G \simeq \mathbb{G}_a$.*

a) *Montrer que $G^p = \{e\}$.*

b) *Soit $\mathscr{N}$ l'espace des matrices N, $n \times n$, telles que $N^p = 0$. On pose $\exp_p(N) := I_n + ... + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!}$ si $N \in \mathscr{N}$. Si $g \in U_n$, on pose : $\log_p(g) := (g - I_n) + ... + (-1)^{p-1} \frac{(g-I_n)^{p-1}}{p-1}$. On suppose que $G \leq U_n$. Vérifier que pour tous $g, g' \in G$, $\exp_p(\log_p(g)) = g$ et $\log_p(gg') = \log_p(g) + \log_p(g')$.*

c) *Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathscr{N}$ engendré par $\log_p(G)$ est de dimension ≤ 2 (indication : c'est l'image de $\mathbb{A}^1 \times G \to \mathscr{N}$, $(a, g) \mapsto a \log_p g$).*

d) *On peut donc supposer que G est un sous-groupe fermé du groupe additif $\mathbb{A}^2$. Montrer qu'il existe un polynôme $f \in k[T_1, T_2]$ irréductible tel que $G = Z_{\mathbb{A}^2}(f)$.*

e) *Montrer que $f(T + g) = f(T)$ pour tout $g \in G$ puis qu'il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{G}_m$ telle que pour tout $a \in \mathbb{A}^2$:*

$$f(T + a) - f(a) = \epsilon(a) f(T) \ .$$

f) *Montrer que ϵ est constante égale à 1.*

g) *Montrer que f est une combinaison linéaire de $T_i^{p^r}$ pour certains $r \geq 0$.*

h) *Montrer qu'il existe un automorphisme $\phi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tel que $\phi(G) = \mathbb{A}^1 \times \{0\}$ et conclure.*