VI

Exercice 1 *Soit X une $G-$variété homogène. Montrer que les composantes irréductibles de X sont les G^0-orbites. En déduire que les composantes irréductibles sont les composantes connexes et qu'elles sont ouvertes et fermées. Montrer que* $\dim X = \dim G - \dim G_x$ *(pour un $x \in X$ quelconque).*

Exercice 2 *On suppose que k est de caractéristique 2. Soient $G := \mathrm{SL}_2$ et $\sigma : G \to G$, $g \mapsto ugu^{-1}$ où u est la matrice :*

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Montrer que $\mathrm{Lie}(G_\sigma) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{g}_\sigma$.

Exercice 3 *Soit $G := \mathrm{GL}_n$.*

a) *Soit $\sigma : G \to G$ un automorphisme intérieur. Montrer que* $\mathrm{Lie}(G_\sigma) = \mathfrak{g}_\sigma$.

b) *Trouver un automorphisme semisimple $\sigma : G \to G$ tel que $G_\sigma = O_n$ (en caractéristique $\neq 2$). En déduire que l'on a bien :*

$$\mathrm{Lie}(O_n) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n \ : \ {}^t\xi = -\xi\} \ .$$

Exercice 4 *Montrer que la classe de conjugaison de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas fermée dans GL_2.

Exercice 5 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant entre variétés irréductibles. Soit $x \in X$ tel que $f^{-1}f(x)$ est fini.*

a) *Montrer que si on a une factorisation : $f : X \xrightarrow{f_1} X' \xrightarrow{f_2} Y$, alors $f_1^{-1}f_1(x)$ est fini.*

b) *Montrer qu'il existe un voisinage ouvert affine U de $f(x)$ dans Y tel que $f^{-1}U$ est affine et tel que $f : f^{-1}U \to U$ est fini (indication : grâce au a) se ramener au cas où la $f^*k[Y]-$algèbre $k[X]$ est engendrée par un élément.).*

Exercice 6 *Soit* B *le sous-groupe des matrices triangulaires supéruieures de* GL_n*. Montrer qu'il existe des sous-groupes distingués connexes* $B = B_0 \supseteq B_1 \supseteq ... \supseteq B_N = 1$ *tels que pour tout* i *:*

$$B_i/B_{i+1} \simeq \mathbb{G}_a \text{ ou } \mathbb{G}_m$$

et que l'on peut choisir les B_i *de sorte que les premiers quotients successifs soient isomorphes à* $\mathbb{G}_m$ *et les suivants à* $\mathbb{G}_a$.

En déduire le même résultat pour un groupe algébrique résoluble connexe quelconque grâce au théorème de Lie-Kolchin.

Exercice 7 *Soit* $G = \mathrm{SL}_2$*. On pose* $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Montrer que* $G \to \mathbb{A}^2$, $g \mapsto g.e_1$ *induit*

a) *un isomorphisme* $G/U \to \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ *pour un certain sous-groupe* U *de* G *;*

b) *un isomorphisme* $G/B \to \mathbb{P}^1$ *pour un certain sous-groupe* B *de* G.