VII

Exercice 1 *Soient $n \geq d \geq 1$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,d}(k)$.*
Si $K = (k_1, ..., k_d) \in \{1, ..., n\}^d$, on note :

$$d_K(A) := \det(A_{k_i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \ .$$

a) *Montrer que si $1 \leq k_1, ..., k_{d-1} \leq n$, si $1 \leq l_0, ..., l_d \leq n$, alors :*

$$\sum_{s=0}^{d} d_{k_1,...,k_{d-1},l_s}(A) d_{l_0,...,\widehat{l_s},...,l_d}(A) = 0 \ .$$

b) *On suppose que A est de la forme :*

$$A = \left(\frac{I_d}{B} \right)$$

pour une certaine matrice $B \in \mathscr{M}_{n-d,d}(k)$. Montrer qu'il existe des polynômes F_I, $I \subseteq \{1, ..., n\}^d$, en $d(n-d)$ variables tels que :

$$d_I(A) = F_I(b_{k,j} \ : \ 1 \leq k \leq d < j \leq n) \ .$$

c) *Si $E \subseteq k^n$ est un sous-espace de dimension d, on pose $\Phi(E) := [v_1 \wedge ... \wedge v_d]$ pour une base quelconque $v_1, ..., v_d$ de E. Vérifier que l'application Φ est bien définie et injective sur l'ensemble des sous-espaces de dimension d de k^n.*

d) *On note $\mathscr{I}$ le noyau du morphisme :*

$$k[X_I \ : \ I \subseteq \{1, ..., n\}, |I| = d] \to k[T_{i,j} \ : \ 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq d]$$

$$X_I \mapsto \det(T_{I,\{1,...,d\}}) \ .$$

On pose :

$$G_{d,n} := \left\{ \ [v] \in \mathbb{P}(\wedge^d k^n) \ : \ \forall \, f \in \mathscr{I}, \, f(v) = 0 \ \right\} \ .$$

Montrer que $G_{d,n} = \operatorname{im} \Phi$.

Exercice 2 *Soit V un $k-$espace vectoriel de dimension n. Soit $1 \leq d \leq n$. Si $w \in \wedge^d V$, on pose :*

$$\phi_w : V \to \wedge^{d+1} V, \ v \mapsto v \wedge w$$

où si $w = w_1 \wedge ... \wedge w_d$, $v \wedge w = v \wedge w_1 \wedge ... \wedge w_d$.

a) *Montrer que* $\dim \ker \phi_w \leq d$ *avec égalité si et seulement si* w *est de la forme* $\lambda v_1 \wedge ... \wedge v_d$ *pour certains* v_i *linéairement indépendants dans* V *(indication : considérer une base* $v_1, ..., v_m$ de $\ker \phi_w$*).*

b) *Retrouver que l'image de* Φ *(cf. exercice 1) est fermée dans* $\mathbb{P}(\wedge^d V)$*.*

c) *On suppose que* $d, d+1 \leq n$*. Montrer que*

$$\{(E, F) \in G_{d,n} \times G_{d+1,n} \ : \ E \subseteq F\}$$

est fermé dans $G_{d,n} \times G_{d+1,n}$ *(indication : montrer que si* $[w_d] \in G_{d,n}$, $[w_{d+1}] \in G_{d+1,n}$*, alors*

$$V \to \wedge^{d+1} V \times \wedge^{d+2} V, \, v \mapsto (v \wedge w_d, v \wedge w_{d+1})$$

a son noyau de dimension $\leq d$ *avec égalité si et seulement s'il y a inclusion entre les sous espaces définis par* w_d *et* w_{d+1}*).*

d) *En déduire que :*

$$\mathscr{D} := \{V_1 \subseteq ... \subseteq V_{n-1} \subseteq k^n \ : \ \forall \, i, \, \dim V_i = i\}$$

est une variété projective.

e) *Montrer que* GL_n / B_n *est isomorphe à la variété ci-dessus. (indication : soit* $e_1, ..., e_n$ *la base canonique de* k^n*, considérer l'application :*

$$\mathrm{GL}_n \to \mathscr{D}, \, g \mapsto ([g(e_1)], ..., [\wedge^{n-1} g(e_1 \wedge, ..., \wedge e_{n-1})]) \ .$$

et l'application :

$$([w_1], ..., [w_{n-1}]) \mapsto (a_{i,j}) \bmod B_n$$

où $a_{i,j} = 0$ *si* $i < j$, $a_{i,j} = 1$ *si* $i = j$ *et* $a_{i,j}$ *est le coefficient de* w_j *devant* $e_1 \wedge ... \wedge e_{j-1} \wedge e_i$ *si* $i > j$*, définie sur un ouvert de* $\mathscr{D}$*).*
Quelle est sa dimension ?