VIII

Exercice 1 *Soit G un groupe résoluble connexe.*

a) *Soit V un $k-$espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_k(V)$. Montrer que $V = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f$.*

b) *Soit $s \in G$ un élément semisimple non central. On suppose que* $\dim G_u = 1$. *Montrer que $Z_G(s)$ est un tore maximal. En déduire que tout élément semisimple est contenu dans un tore maximal.*

c) *Par récurrence sur* $\dim G$ *montrer que tout élément semisimple est contenu dans un tore maximal.*

Exercice 2 *Montrer que $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}^{mn+m+n}$ (indication : $k^{m+1} \otimes k^{n+1} \simeq k^{(m+1)(n+1)}$).*

Exercice 3 (Théorème du point fixe de Borel) *Soit G un groupe algébrique.*

Soit X une $G-$variété.

a) *Montrer que si $G = \mathbb{G}_m$ ou $\mathbb{G}_a$ alors G a un point fixe dans X (indication : soit $G.x$ une orbite de dimension minimale alors $G.x$ est complet ; or, G/G_x est affine et homéomorphe à $G.x$ ...)*

b) *Montrer que si G est résoluble connexe et X complète, alors G a au moins un point fixe (indication : $G \geq G_1 \geq ... \geq G_N = e$ pour certains sous-groupes distingués connexes tels que $G_i/G_{i+1} \simeq \mathbb{G}_a$ ou $\mathbb{G}_m$ pour tout i ; utiliser le a)).*

Exercice 4 *Soit G un groupe algébrique connexe.*

a) *Montrer que si B est un sous-groupe résoluble connexe de G alors G/B est projectif (indication : supposer que $G \subseteq \mathrm{GL}_n$ et que B est le stabilisateur d'une droite V_1 ; utiliser le théorème de Lie-Kolchin pour montrer que B stabilise un drapeau complet et montrer que G/B est homéomorphe à une orbite fermée de la variété de drapeaux correspondante).*

b) *En utilisant le théorème du point fixe de Borel montrer que tous les sous-groupes résolubles connexes de G maximaux pour l'inclusion sont de même dimension et sont conjugués.*