Université Lyon 1
Math-III-Algèbre — semestre de printemps 2009
Examen partiel
jeudi 9 avril 2009
durée : 2h
documents autorisés, calculatrices interdites

Exercice 1

La matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}, sinon passer à un autre exercice.

Exercice 3

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $R(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de $R(t)$.

b) Calculer l'inverse de $R(t)$.

c) Montrer que $R(t)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et déterminer une matrice P inversible indépendante de t et une matrice diagonale D telle que :
$$R(t) = PDP^{-1}$$

d) Pour quels $t \in \mathbb{R}$, la matrice $R(t)$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

On pose

$$B := \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Trouver les valeurs propres de B.

b) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que :

$$B = PDP^{-1} \ .$$

c) On suppose qu'il existe une matrice complexe A telle que $A^2 = B$.
Montrer que A et B commutent.

d) On suppose toujours que $A^2 = B$. Montrer que A laisse stable les espaces propres de B.

e) Montrer que toute base de vecteurs propres de B est aussi une base de vecteurs propres de A.

f) Trouver toutes les matrices diagonales d telles que :

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \ .$$

g) Combien y a-t-il de matrices A telles que $A^2 = B$?

MATH - III - ALGÈBRE

CORRIGÉ DU PARTIEL DU 9/4/19

Université Lyon I

Exercice 1 :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \end{pmatrix}$

est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

$$1, 6, 10, 13, 15.$$

Cela fait 5 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable

Exercice 2

a) $\chi_A(X) = (X-1)^3$

$m_A(X)$ divise $\chi_A(X)$ donc $m_A(X) = X-1, (X-1)^2$ ou $(X-1)^2$

Or $A - I_3 \neq 0$ et $(A-I_3)^2 = 0$ donc $m_A(X) = (X-1)^2$.

b) A n'est pas diagonalisable car son polynôme minimal a 1 comme racine double

c) A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

a) $\chi_{R(t)}(X) = X^2 - 2\cos t\, X + 1 = (X - e^{it})(X - e^{-it})$

b) $R(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = R(-t)$

c) Les valeurs propres de $R(t)$ sont e^{it} et e^{-it}

Si $t = 0 \mod \pi$, alors $R(t) = \begin{cases} I_2 & \text{si } t = 0 \mod 2\pi \\ -I_2 & \text{si } t = \pi \mod 2\pi \end{cases}$

Si $t \neq 0 \mod \pi$, $R(t)$ a 2 valeurs propres distinctes et $\operatorname{Ker}(R(t) - e^{it} I_2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Ker}(R(t) - e^{-it} I_2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Donc $R(t) = P D P^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$

Excercice 4

a) $\chi_B(X) = X(X-1)(X-16)$

Donc les valeurs propres de B sont

$$0, 1, 16$$

b) $E_0 := \operatorname{Ker} B = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_1 := \operatorname{Ker}(B - I_3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{16} := \operatorname{Ker}(B - 16 I_3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $B = P D P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

c) $AB = A \cdot A^2 = A^3 = A^2 A = BA$

d) Soit λ une valeur propre de B.

Soit $Y \in \mathrm{Ker}(B - \lambda I_3)$.

On va montrer que $AY \in \mathrm{Ker}(B-\lambda I_3)$:

$$\begin{aligned} BAY &= ABY && (\text{car } AB = BA) \\ &= A(\lambda Y) && (\text{car } Y \in \mathrm{Ker}(B-\lambda I_3)) \\ &= \lambda(AY) && (\text{car } A \text{ est linéaire}) \end{aligned}$$

donc $AY \in \mathrm{Ker}(B-\lambda I_3)$.

e) Soit (v_1, v_2, v_3) une base de vecteurs propres de B.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres correspondantes.

On peut prendre $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 16$.

On a alors $\mathrm{Ker}(B - \lambda_i I_3) = \mathbb{C} v_i$

D'après d) $A v_i \in \mathbb{C} v_i$ $(\forall 1 \leq i \leq 3)$

Donc (v_1, v_2, v_3) est aussi une base de vecteurs propres de A

f) Soient $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}$ tels que

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Alors $d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1^2 = 0 \\ d_2^2 = 1 \\ d_3^2 = 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow d_1 = 0,\ d_2 = \pm 1,\ d_3 = \pm 4$

Donc les matrices diagonales d telles que $d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

g) D'après b) et e), les

vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

forment une base de vecteur propres de A et de B.

Donc si on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A = PdP^{-1}$ où d est une matrice diagonale.

Ainsi $A^2 = B \Leftrightarrow Pd^2P^{-1} = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow d^2 = D$

$\Leftrightarrow d = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = B \Leftrightarrow A = PdP^{-1}$

où $d \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix} \right.$

ce qui fait 4 solutions.

Université Lyon 1
Math-III-Algèbre — semestre de printemps 2009
Contrôle continu final
jeudi 18 juin 2009
durée : 2h
documents autorisés, calculatrices interdites

Exercice 1

a) Rappeler la définition d'une matrice nilpotente.

b) Donner un exemple de matrice non nulle N, de taille 3×3, vérifiant $N^2 = 0$ et un exemple vérifiant $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$.

Soient $n > 0$ et $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

c) Quel est le polynôme caractéristique de N ?

d) Montrer que $N^n = 0$ et que la trace de N : $\mathrm{Tr} N$ est nulle.

e) Exprimer $\exp N$ comme un polynôme de degré $n-1$ en N.

f) Quelles sont les valeurs propres de $\exp N$? Montrer que $\text{dét}(\exp N) = e^{\mathrm{Tr} N}$.

Soit D une matrice diagonalisable.

g) Montrer que $\text{dét}(\exp D) = e^{\mathrm{Tr} D}$.

h) Montrer que $\text{dét}(\exp A) = e^{\mathrm{Tr} A}$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

a) Diagonaliser (sur $\mathbb{C}$) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp tA = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} .$$

Exercice 3

Donner la décomposition de Jordan-Dunford des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 4
Soit

$$A := \begin{pmatrix} -6 & 0 & 21 \\ -2 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \ .$$

a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
b) Déterminer les projecteurs spectraux de A.
c) Exprimer les coefficients de la matrice $\exp tA$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
d) Trouver les fonctions x, y, z réelles telles que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = -6x(t) + 21z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + 6z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 7z(t) \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 0 \text{ et } \lim_{t \to -\infty} z(t) = 6 \ .$$

Université Lyon 1
Math-III-Algèbre — semestre de printemps 2009
corrigé du contrôle continu final du jeudi 18 juin 2009

Exercice 1
a) Une matrice N est nilpotente si $N^a = 0$ pour un certain $a > 0$.
b) Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $n > 0$ et $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
c) $\chi_N(X) = X^n$ car 0 est la seule valeur propre possible pour N.
d) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $N^n = 0$. De plus $-\mathrm{Tr}N$ est le coefficient devant X^{n-1} dans $\chi_N(X)$. Donc $\mathrm{Tr}N = 0$.
e) $\exp N = 1 + N + \frac{N^2}{2} + ... + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$.
f) Les valeurs propres de $\exp(N)$ sont les $1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + ... + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ où λ est une valeur propre de N. Donc 1 est la seule valeur propre de $\exp N$. D'où : $\mathrm{dét}(\exp N) = 1 = e^0 = e^{\mathrm{Tr}N}$.
g) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de D. La matrice D est semblable à la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $\exp D$ à la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & ... & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

donc :

$$\mathrm{dét}(\exp D) = e^{\lambda_1} ... e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + ... + \lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}D}.$$

h) On utilise la décomposition de Jordan-Dunford de A : il existe une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N qui commutent et telles que $A = D + N$. On a alors $\exp A = \exp D \exp N$ car $DN = ND$ et d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\text{dét} \exp A &= \text{dét} \exp D \text{dét} \exp N \\
&= e^{\text{Tr} D} e^{\text{Tr} N} \\
&= e^{\text{Tr} D + \text{Tr} N} \\
&= e^{\text{Tr} A} \quad .
\end{aligned}$$

Exercice 2

a) Si $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, alors $A = P \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}$.

b) On a :

$$\begin{aligned}
\exp tA &= \exp tP \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \exp \begin{pmatrix} -it & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Exercice 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est déjà diagonalisable (2 valeurs propres distinctes).

Exercice 4

a) $\chi_A(X) = X(X-1)^2$ et $P_A(X) = X(X-1)$.

b) Notons π_0 et π_1 les projecteurs spectraux associés respectivement aux valeurs propres 0 et 1. On a $\pi_0 + \pi_1 = 1$ et $0.\pi_0 + 1.\pi_1 = A$ car A est diagonalisable donc :$\pi_0 = 1 - A$ et $\pi_1 = A$.

c) On a :

$$\exp tA = \pi_0 + e^t \pi_1 = (1 - A) + e^t A$$

$$= \begin{pmatrix} 7 - 6e^t & 0 & 21(e^t - 1) \\ 2(1 - e^t) & e^t & 6(e^t - 1) \\ 2(1 - e^t) & 0 & 7e^t - 6 \end{pmatrix}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d) Si on pose $X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ pour tout t réel, alors :

$$X(t) = \exp tA.X(0)$$

$$= \exp tA. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(0) \end{pmatrix}$$

$$= z(0) \begin{pmatrix} 21(e^t - 1) \\ 6(e^t - 1) \\ 7e^t - 6 \end{pmatrix} .$$

En particulier, $\lim_{t\to-\infty} z(t) = -6z(0) = 1 \Leftrightarrow z(0) = -1$. En conclusion :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 21(1-e^t) \\ 6(1-e^t) \\ 6-7e^t \end{pmatrix} .$$

Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre de printemps 2010
Contrôle continu écrit n° 1
jeudi 22 avril 2010
durée : 2h
documents et calculatrices interdits

Exercice 1 *Soit la matrice* $M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de M *est :*

$$\chi_M(X) = (X^2+1)^2 \ .$$

b) Quelles sont les valeurs propres complexes de M *?*

c) La matrice M *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *? si oui, donner une base de vecteurs propres.*

d) La matrice M *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 2 *Soit* A *la matrice réelle* $:= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le rang de A *?*

b) Quelle est la dimension de $\ker A$ *?*

c) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* A*. Quelle est la valeur propre associée ?*

d) Montrer que A *est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de* A*.*

e) Quel est le polynôme caractéristique de A *? Quel est son polynôme minimal ?*

Exercice 3 *Pour quelle(s) valeur(s) de* α *la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 4 *Soit* $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\chi_A(X)$. La matrice A est-elle inversible ?
b) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = PDP^{-1} \ .$$

Exercice 5 *Les matrices suivantes sont elles semblables*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ?$$

Exercice 6 *a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de chacune des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) Les deux dernières matrices de la liste ci-dessus sont-elles semblables ? Indication : Noter A une des deux matrices, et calculer $\mathrm{rang}(A - I_4)$.

Exercice 7 *Soit $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire. On suppose que $u^n = 0$ et que $u^{n-1} \neq 0$.*
a) Soit $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $u^{n-1}(v) \neq 0$. Montrer que la famille :

$$\mathscr{B} := \{v, u(v), ..., u^{n-1}(v)\}$$

est une base de $\mathbb{K}^n$.
b) Quelle est la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$?

Math III algèbre — corrigé du contrôle du jeudi 22 avril 2010

Exercice 1

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & X & 1 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ X & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \end{vmatrix}$

$$= X(X^3+X) + (X^2+1)$$

$$= X^4 + 2X^2 + 1$$

$$= \underline{(X^2+1)^2}$$

b) $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{\pm i\}$

c) $\operatorname{Ker}(M - iI_4)$?

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} t = ix \\ z = iy \\ y = iz \\ -x = it \end{cases} \iff \begin{cases} x = it \\ y = iz \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker}(M - iI_4) = \left\{ \begin{pmatrix} it \\ iz \\ z \\ t \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{C} \right\}$

$$= \underline{\mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

De même :

$$\underline{\operatorname{Ker}(M + iI_4) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Donc $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de vecteurs propres et M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

d) M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $Sp_{\mathbb{R}} M = \emptyset$

Exercice 2

a) rang $A = 1$

b) D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} A = 4-1=3$

c) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\\8\\8\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est propre pour A. La valeur propre associée est 8.

d) $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Ker}(A-8I_4) \geq 3+1=4$

Donc $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A-8I_4) = \mathbb{K}^4$ et A est diagonalisable.

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow 2x+2y+2z+2t=0 \Leftrightarrow -(x+y+z)=t$

Donc $\operatorname{Ker} A = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Or $\underline{\dim \operatorname{Ker}(A-8I_4) = 1}$ et $\underline{\operatorname{Ker}(A-8I_4) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}$

d'où une base de vecteurs propres:

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

e) $\chi_A(X) = X^3(X-8)$

$m_A(X) = X(X-8)$ (car A diagonalisable)

Exercice 3

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour seule valeur propre : 1.

Donc $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à l'identité : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c-à-d si et seulement si elle est <u>égale</u> à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisable $\Leftrightarrow \underline{\alpha = 0}$.

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\chi_A(X) = X^3 - 2X = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

En particulier : $\det A = 0$ et A n'est pas inversible

b) La matrice A a 3 valeurs propres distinctes : $0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Donc A est diagonalisable

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$ Donc $\operatorname{Ker} A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - \sqrt{2} I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x + z = \sqrt{2} y \\ y = \sqrt{2} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \sqrt{2}x \end{cases}$ Donc $\underline{\operatorname{Ker}(A - \sqrt{2} I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$

De même $\underline{\operatorname{Ker}(A + \sqrt{2} I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$

Conclusion : $A = PDP^{-1}$ où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Exercice 5

Soient $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\chi_A(X) = \chi_B(X) = (X-1)^2(X-2)$.

<u>$\mathrm{Ker}(A - I_3)$?</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = x \\ y = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$$

Donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 1 < 2$

et <u>A n'est pas diagonalisable.</u>

En revanche :

<u>$\mathrm{Ker}(B - I_3)$?</u> $\quad B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 2x + 2y = y \\ z = z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow y + 2x = 0$$

D'où : $\mathrm{Ker}(B - I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dim \mathrm{Ker}(B - I_3) = 2$

et <u>B est diagonalisable.</u>

En particulier, <u>A n'est pas semblable à B.</u>

Exercice 6

$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\chi_{I_4}(X) = \chi_B(X) = \chi_C(X) = \chi_D(X) = (X-1)^4$; $\quad m_{I_4}(X) = X - 1$, $m_B(X) = (X-1)^4$, $m_C(X) = m_D(X) = (X-1)^2$

b) $C - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ d'où $\mathrm{rang}(C - I_4) = 2 \neq \mathrm{rang}(D - I_4) = 1$

En particulier, C n'est pas semblable à D.

(sinon : $C = PDP^{-1} \Rightarrow C - I_4 = P(D - I_4)P^{-1}$

$\Rightarrow \text{rang}(C - I_4) = \text{rang}(D - I_4)$)

Exercice 7

a) Si $\lambda_0 v + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v) = 0$

alors $u^{n-1}(\lambda_0 v + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v)) = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 u^{n-1}(v) + 0 + \cdots + 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 u^{n-1}(v) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$.

Donc $\lambda_1 u(v) + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v) = 0$

On applique u^{n-2} :

$\lambda_1 u^{n-1}(v) + 0 + \cdots + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

donc $\lambda_2 u^2(v) + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v) = 0$

On applique u^{n-3} ... on trouve $\lambda_2 = 0$.

Et ainsi de suite ...

Conclusion: $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Comme $\mathcal{B}$ a n élément et $n = \dim \mathbb{K}^n$, on a bien que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$

b) $$\text{Mat}(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre de printemps 2010
Contrôle continu écrit n° 2
vendredi 18 juin 2010
durée : 2h
documents et calculatrices interdits

Première partie : travaux pratiques notée sur 20, coefficient 0,1

Exercice 1 ***Question 1.1*** *Par quelle ligne de commande définiriez-vous la matrice :*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -9 & 13 & 16 \\ -1 & -1 & 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

dans le logiciel sage ?

*

Pour le logiciel sage, on rappelle que la commande « charpoly() »donne le polynôme caractéristique d'une matrice et que la commande « factor() » factorise un polynôme.

Question 1.2 *Que taperiez-vous pour obtenir le polynôme caractéristique factorisé de la matrice M.*

*

Il se trouve que le polynôme caractéristique de M est :

$$\chi_M(X) = (X-2)^2(X-3)^3 \ .$$

On tape les lignes suivantes :

```
x = polygen(QQ);

xgcd((x-3)^3,(x-2)^2);
```

On obtient la réponse suivante à l'écran :

```
(1/9, -1/3*x + 5/9, 1/3*x^2 - 20/9*x + 34/9)
```

Cela signifie que l'on a une relation de Bézout :

$$\frac{1}{9} = (-\frac{1}{3}X + \frac{5}{9})(X-3)^3 + (\frac{1}{3}X^2 - \frac{20}{9}X + \frac{34}{9})(X-2)^2 \ .$$

Question 1.3 *Exprimer les projecteurs spectraux de M comme des polynômes en M.*

Exercice 2 *On suppose que J est une matrice 5×5 à coefficients rationnels et que I est la matrice I_5.*

Lorsque l'on tape :

```
((J-5*I)).right_kernel();   ,
```

le logiciel sage « répond » (traduction) :

```
Espace vectoriel de dimension 3 sur Q
matrice de base :
[   1    0    0    0 -1/3]
[   0    1    1    0  2/3]
[   0    0    0    1 -2/3]
```

ce qui signifie que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

forment une base du noyau $\ker(J - 5I_5)$.

Après avoir tapé les lignes suivantes :

```
(J-4*I).right_kernel();
((J-4*I)**2).right_kernel();
```

on obtient les réponses suivantes :

```
Espace vectoriel de  dimension 1 sur Q
matrice de base :
[  1 1/2   1 1/2   0]
```

puis :

```
Espace vectoriel de dimension  2 sur Q
matrice de base :
[   1  1/2    0   -1  1/2]
[   0    0    1  3/2 -1/2]
```

Quelles sont les dimensions de $\ker(J - 4I_5)$ *et de* $\ker(J - 4I_5)^2$ *? En déduire une matrice de Jordan semblable à la matrice J.*

Deuxième partie : cours et travaux dirigés

Notée sur 20, coefficient 0,4

Exercice 1 *a) Qu'est-ce qu'une matrice orthogonale ?*

b) Les matrices suivantes sont-elles orthogonales :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ?$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} ?$$

c) Combien y a-t-il de matrices réelles orthogonales et diagonales de taille $n \times n$?

Exercice 2 *Soit M la matrice :*

$$M := \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Montrer que le polynôme caractéristique de M est :

$$\chi_M(X) = (X-1)(X+1)^2 .$$

Déterminer le polynôme minimal de M. La matrice M est-elle-diagonalisable ?

b) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton pour M. En déduire une expreession de M^{-1} comme un polynôme en M.

c) Donner une matrice de Jordan semblable à M.

d) Exprimer les projecteurs spectraux de M sous la forme de polynômes en M.

e) Trouver une matrice diagionalisable D et une matrice nilpotente N telles que :

$$DN = ND \text{ et } M = D + N .$$

f) Quel est le plus petit entier $k > 0$ tel que $N^k = 0$. Calculer $\exp(tD)$ et $\exp(tN)$ pour $t \in \mathbb{R}$. En déduire $\exp(tM)$, $t \in \mathbb{R}$.

g) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t) + 4x_3(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + 4x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0 .$$

Exercice 3 *Déterminer les invariants de similitude des matrices :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Université Lyon I

Corrigé du contrôle de MATH-III-ALGÈBRE du vendredi 18 juin 2010

Première partie :

Exercice 1

Question 1.1.

M= matrix([[3,1,-2,1,1],[0,4,-2,2,3],[1,2,-2,4,6],
[2,3,-9,13,16],[-1,-1,4,-5,-5]])

Question 1.2.

P= M.charpoly(); P.factor();

Question 1.3.

Notons π_2 et π_3 les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres 2 et 3 de M.

On a :

$$1 = (-3X+5)(X-3)^3 + (3X^2-20X+34)(X-2)^2$$

donc $\pi_2 = (-3M+5I_5)(M-3I_5)^3$ et $\pi_3 = (3M^2-20M+34I_5)(M-2I_5)^2$

Exercice 2

On a : $\dim \mathrm{Ker}(J-4I_5) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(J-5I_5)^2 = 2$

J est semblable à la matrice de Jordan suivante :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Deuxième partie

Exercice 1

a) Une matrice orthogonale (réelle, de taille $n\times n$) est une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\,^tA.A = I_n$

b) Soient $A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $\,^tAA = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas orthogonale

$\,^tBB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc B est orthogonale

c) Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ une matrice réelle diagonale et orthogonale

$$\,^tDD = I_n \iff \begin{pmatrix} d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^2 \end{pmatrix} = I_n$$

$$\iff \forall\, 1 \leq i \leq n,\ d_i^2 = 1 \iff \forall i = 1 \text{ à } n,\ d_i = \pm 1$$

Donc les matrices réelles diagonales et orthogonales de taille $n\times n$ sont les matrices $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ où $d_i = \pm 1$ $(\forall\, 1 \leq i \leq n)$

Il y en a donc 2^n.

Exercice 2

a) $\chi_M(X) = X^3 + X^2 - X - 1$

$= (X-1)(X^2+2X+1)$

$= (X-1)(X+1)^2$

Le polynôme minimal de M est donc $(X-1)(X+1)$ ou $(X+1)^2(X-1)$

Or $(M - I_3)(M+I_3) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq 0$

donc $(X-1)(X+1)^2$ est le polynôme minimal de M.

b) D'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$\chi_M(M) = 0$

$\Leftrightarrow \quad M^3 + M^2 - M - I_3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad I_3 = M^3 + M^2 - M$

$\Rightarrow \quad M^{-1} = M^{-1}M^3 + M^{-1}M^2 - M^{-1}M$

$\Rightarrow \quad M^{-1} = M^2 + M - I_3$

c) M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) On cherche une relation de Bézout entre $X-1$ et $(X+1)^2$:

$\frac{1}{(X-1)(X+1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{(X+1)^2}$ pour certains a, b, c.

On trouve : $a = \frac{1}{4}$ $\quad b = -\frac{1}{4}$ $\quad c = -3/4$

d'où : $1 = \frac{1}{4}(X+1)^2 - \frac{1}{4}(X+3)(X-1)$

donc : si on note π_{-1} et π_1 les projecteurs spectraux de M associés aux valeurs propres -1 et 1 on a :

$\pi_{-1} = -\frac{1}{4}(M+3I_3)(M-I_3)$ et $\pi_1 = \frac{(M+I_3)^2}{4}$

e) On pose $D = -\Pi_{-1} + \Pi_1 = \frac{1}{4}\left[(M+I_3)^2 + (M+3I_3)(M-I_3)\right]$
$= \frac{1}{4}\left[2M^2+4M-2I_3\right] = \frac{M^2+2M-I_3}{2}$

et $N = M - D$

$= \frac{-M^2}{2} + \frac{I_3}{2}$

Plus concrètement : $D = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

et $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

f) Le plus petit entier k tel que $N^k = 0$ est $k=2$.

Donc $\exp(tN) = I_3 + tN = \begin{pmatrix} 1+2t & 0 & -4t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1-2t \end{pmatrix}$

et $\exp(tD) = e^{-t}\Pi_{-1} + e^{t}\Pi_1$

Or $\Pi_{-1} = \frac{-1}{4}(M+3I_3)(M-I_3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

et $\Pi_1 = I_3 - \Pi_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

donc : $\exp(tD) = e^{-t}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ainsi : $\exp(tM) = \exp(tN + tD) = \exp(tN)\exp(tD)$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} 3+2t & -2 & -4-4t \\ 1 & 0 & -2 \\ 1+t & -1 & -1-2t \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

g) On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

Le système de l'énoncé devient :

$$\begin{cases} X'(t) = M X(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} X(t) = \exp(tM)\, X(0) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X(t) = \exp(tM)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

Donc $\begin{cases} x_1(t) = -2e^{-t} + 2e^{t} \\ x_2(t) = e^{t} \\ x_3(t) = -e^{-t} + e^{t} \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

Exercice 3 :

Posons $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$XI_3 - I = \begin{pmatrix} X-1 & & \\ & X-1 & \\ & & X-1 \end{pmatrix}$ donc les invariants de similitude de I sont : $X-1, X-1, X-1$

$XI_3 - J = \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$

$\underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & X-1 & 0 \\ X-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$

$\underset{C_2 \leftarrow C_2 + (X-1)C_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X-1 & (X-1)^2 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + (X-1)L_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (X-1)^2 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (X-1)^2 \\ 0 & X-1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{C_3 \leftarrow C_3 + (X-1)^2 C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & (X-1)^3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + (X-1)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-1)^3 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (X-1)^3 \end{pmatrix}$$

Donc J a un seul invariant de similitude :

$$(X-1)^3$$