Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre d'automne 2010
Contrôle continu écrit n° 1
lundi 8 novembre 2010
durée : 2h
documents et calculatrices interdits

Exercice 1 *Soit* $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Calculer son polynôme minimal.
b) Calculer A^{-1}.
c) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\binom{n}{2} := \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2 *Soient :*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \ B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Calculer AB et BA. En déduire que les espaces propres de A sont stables par B.
b) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
c) Trouver les vecteurs qui sont des vecteurs propres à la fois pour A et pour B.
d) Trouver une matrice inversible P et deux matrices diagonales D, D' telles que :

$$A = PDP^{-1} \text{ et } B = PD'P^{-1} .$$

Calculer P^{-1}.

Exercice 3 *Soit E l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles 2×2 :*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} .$$

a) Donner une base de E.
b) Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $X \in E$, ${}^tAXA \in E$. Donner la matrice de l'application linéaire :

$$E \to E \ , \ X \mapsto {}^tAXA$$

dans la base trouvée en a).
c) La matrice trouvée en b) est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 4 *Soit* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme défini par :*

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ u(x, y, z) = (2x + 5y - 3z, 2x + y + 4z, -3x - 5y)\ .$$

a) Déterminer la matrice de u *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*.*

b) Calculer le polynôme caractéristique de u *et son polynôme minimal.*

c) L'endomorphisme u *est-il diagonalisable ?*

d) Trouver un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2(w) \neq 0$*. Montrer que* $w, (u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(w), (u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2(w)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*. Quelle est la matrice de* u *dans cette base ?*

Corrigé de l'examen partiel de Math-III-algèbre du lundi 8/11/10

Exercice 1

a) $\chi_A(X) = (X-1)^3$

La seule valeur propre de A est : 1.

Si A était diagonalisable, A serait semblable à $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} = I_3$ donc égale à I_3. Or $A \neq I_3$ donc A n'est pas diagonalisable.

Le polynôme minimal de A est :
$m_A(X) = X-1$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$.

$A \neq I_3$, $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \neq 0$ donc $m_A(X) = (X-1)^3$.

b) On a : $\det A = 1$ donc A est inversible et :

$$A^{-1} = {}^t\hat{A} \quad \text{où } \hat{A} \text{ est la comatrice de } A.$$

Donc : $A^{-1} = {}^t\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) Par récurrence sur $n \geq 0$, on montre que

$$A^n = \begin{pmatrix}1&n&\binom{n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Pour $n=0$: $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Si c'est vrai pour n, alors $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix}1&n&\binom{n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&n+1&n+\binom{n}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n+1&\binom{n+1}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Si $n<0$: $A^n = (A^{-n})^{-1} = \begin{pmatrix}1&-n&\binom{-n}{2}\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix}1&+n&n^2-\binom{-n}{2}\\0&1&+n\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n&\binom{n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n^2-\binom{-n}{2} &= n^2 - \frac{(-n)(-n-1)}{2} \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n\left(n - \left(\frac{n+1}{2}\right)\right) \\ &= n\left(\frac{n-1}{2}\right) \\ &= \binom{n}{2} \end{aligned}}$$

Exercice 2.

a) $AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = BA$

Soit λ une valeur propre de A.

Soit $E_\lambda := \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ l'espace propre associé.

Alors si $x \in E_\lambda$, $ABx = BAx = B(\lambda x) = \lambda Bx$

Donc $Bx \in E_\lambda$; et cela est vrai pour tout $x \in E_\lambda$.

Donc E_λ est stable par B.

b) $\chi_A(X) = X^3 - tr(A)X^2 + \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & 0 \\ \cdot & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)X - \det A$

$= X^3 - 5X^2 + 8X - 4$

$= (X-1)(X^2 - 4X + 4)$

$= (X-1)(X-2)^2$.

Donc A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\dim E_2(A) = 2$

où $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$

Or si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $x \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 0$.

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\dim E_2(A) = 2$ et A est diagonalisable.

Pour B :

$\chi_B(X) = X^3 - 2X^2 + X$

$= X(X^2 - 2X + 1)$

$= X(X-1)^2$

Donc B est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\dim E_1(B) = 2$

où $E_1(B) := \mathrm{Ker}(B - I_3)$

Or si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a :

$x \in E_1(B) \Leftrightarrow Bx = x \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 = x_1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 0$

Donc $E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\dim E_1(B) = 2$ et B est diagonalisable.

5/10

c) Soit $v \neq 0$ un vecteur propre pour A et pour B.

On a : $Sp(A) = \{1, 2\}$ donc

$Av = v$ ou $Av = 2v$.

si $Av = v$, alors $v \in Ker(A - I_3)$ et comme $Ker(A - I_3)$ est stable par B (cf a)) et de dimension 1, forcément,

$Bv \in \mathbb{R}v$ et v est un vecteur propre de B automatiquement.

si $Av = 2v$, alors

$v \in E_2(A) = Ker(A - 2I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

donc $v = \begin{pmatrix}x_1\\-2x_1\\x_3\end{pmatrix}$ pour certains $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, v est un ~~vale~~ vecteur propre de B

si et seulement si $Bv \in \mathbb{R}v$.

Or $Bv = \begin{pmatrix}-x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix}$.

Donc $Bv \in \mathbb{R}v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix}-x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\-2x_1\\x_3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \text{ et } \lambda = 0 \\ \text{ou} \end{cases}$

6/10

Conclusion :

un vecteur $v \neq 0$ dans $\mathbb{R}^3$ est un vecteur propre pour A et B

si et seulement si $\begin{cases} v \in Ker(A - I_3) \setminus \{0\} \\ \text{ou } v \in \left\{\begin{pmatrix}x_1\\-2x_1\\0\end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}-x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \end{cases}$

Comme $Ker(A - I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, les vecteurs propres pour A et B

sont les éléments de : $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \setminus \{0\} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \setminus \{0\} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \setminus \{0\}$

d) Soient $f_1 := \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ $f_3 := \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

(car $f_1 \in Ker(A - I_3)$ et $f_2, f_3 \in Ker(A-$ … sont indép…

Ces 3 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ et :

$Af_1 = f_1$, $Af_2 = 2f_2$, $Af_3 = 2f_3$

$Bf_1 = f_1$, $Bf_2 = 0$, $Bf_3 = f_3$

Donc si $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & -2 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans f_1, f_2, f_3) on a :

$A = P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{-1}$ et $B = P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}P^{-1}$.

Calcul de P^{-1} : $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t\tilde{P} = -{}^t\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\-1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\ [illegible] & 1 & 1\end{pmatrix}$

7/10 Exercice 3

a) $E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Les matrices $\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}$, $\underset{e_2}{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}$, $\underset{e_3}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$ forment une base de E.

b) si X est symétrique, alors

$${}^t({}^tAXA) = {}^tA\,{}^tX A = {}^tAXA$$

donc ${}^tAXA$ est aussi symétrique.

$${}^tA\begin{pmatrix}x&y\\y&z\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4x+4y+z & 2y+z\\ 2y+z & z\end{pmatrix}$$

$$= (4x+4y+z)\,e_1 + (2y+z)\,e_2 + z\,e_3$$

Donc la matrice de $X \mapsto {}^tAXA$ dans la base e_1, e_2, e_3 est :

$$A = \begin{pmatrix}4&4&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

8/10

c) $\det A = 8 \neq 0$ donc A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&-4&2\\0&4&-4\\0&0&8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice 4

a) La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix}2&5&-3\\2&1&4\\-3&-5&0\end{pmatrix}$$

b) $\chi_u(X) = \chi_A(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

$$= (X-1)^3$$

Donc le polynôme minimal de u est

$m_u(X) = X-1$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$

or $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix}1&5&-3\\2&0&4\\-3&-5&-1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\overset{\neq 0}{20}&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix} \neq 0$

donc $m_A(X) = m_u(X) = (X-1)^3$.

9/10

c) le polynôme $m_u(X)$ n'est pas à racines simples. (1 est racine triple) donc u n'est pas diagonalisable.

d) $(A-I_3)^2$ a une première colonne non nulle.

Donc [redacted] $(u-I)^2(w) \neq 0$ si $w = (1,0,0)$

Si (*) $\lambda w + \mu (u-I)(w) + \nu (u-I)^2(w) = 0$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Alors si on applique $(u-I)^2$ à (*) on trouve : $\lambda (u-I)^2(w) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

(car $(u-I)^2(w) \neq 0$)

donc $\mu (u-I)(w) + \nu (u-I)^2(w) = 0$.

Si on applique $(u-I)$ on trouve :

$\mu (u-I)^2(w) = 0$

donc $\mu = 0$.

Donc $\nu . (u-I)^2(w) = 0$

et $\nu = \mu = \lambda = 0$.

Donc w, $(u-I)(w)$, $(u-I)^2(w)$ sont indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$.

10/10

On a :

$u(w) = w + (u-I)(w)$

$u((u-I)(w)) = (u-I)(w) + (u-I)^2(w)$

$u((u-I)^2(w)) = (u-I)^2(w) + \underbrace{(u-I)^3(w)}_{=0}$

donc dans la base w, $(u-I)(w)$, $(u-I)^2(w)$, la matrice de u est la matrice

$$J_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre d'automne 2010-2011
Contrôle final
jeudi 20 janvier 2011
13h45 - 15h45
documents et calculatrices interdits

Question de cours : Énoncer le théorème de décomposition de Dunford-Jordan ?

Exercice 1 *Soit*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X)$.
b) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{\chi_A(X)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - i\sqrt{2}} + \frac{b}{X + i\sqrt{2}} .$$

c) Exprimer les projecteurs spectraux de A en fonction de A.
d) Pour tout $n > 0$, déterminer des réels α_n, β_n tels que :

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A .$$

e) Calculer les coefficients de la matrice A^{2n} pour $n > 0$.

Exercice 2 *Soit :*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Calculer A^2, A^3, A^4.
b) Calculer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X)$.
c) Exprimer les projecteurs spectraux de A comme des polynômes en A.
d) Montrer que pour tout t réel, on a :

$$\begin{aligned} \exp(tA) = \frac{1}{2}(\cosh t + \cos t) I_4 \\ + \frac{1}{2}(\sinh t + \sin t) A \\ + \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t) A^2 \\ + \frac{1}{2}(\sinh t - \sin t) A^3 \end{aligned}$$

où : $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ *et* $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$.

f) Trouver la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *4 fois dérivable, qui vérifie :*

$$x^{(4)} = x \ , \ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 1 \ .$$

Exercice 3 *Soit* $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice réelle. On pose* $\Delta := (a-d)^2 + 4bc$.

On suppose dans cet exercice que $\Delta = 0$.

a) Montrer que A *n'a qu'une seule valeur propre.*

b) En déduire la formule suivante :

$$\exp(A) = e^{\frac{a+d}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{a-d}{2} & b \\ c & 1 - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 4 *a) Déterminer les polynômes caractéristiques et minimaux des matrices suivantes :*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) Les matrices A *et* B *sont-elles semblables ?*

Exercice 5 *(Cet exercice porte sur les t.p. sage, il est facultatif pour ceux qui ont une dispense d'assiduité)*

*

a) Comment définir la matrice suivante avec le logiciel sage :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} ?$$

b) Quelle commande taper pour calculer M^{2011} *?*

c) Quel résultat obtient-on si tout marche bien ?

MATH - III - ALGÈBRE

Cours :

Théorème : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe un unique couple

(D,N) ,

où D est diagonalisable , N nilpotente, tel que :

$DN = ND$ et $A = D+N$.

Exercice 1 :

a) $\chi_A(X) = X^3 + 2X = X(X+i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})$

b) $$\frac{1}{X^3+2X} = \frac{\frac{1}{2}}{X} - \frac{\frac{1}{4}}{X-i\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{X+i\sqrt{2}}$$

c) On a une relation de Bézout :

$$1 = \frac{1}{2}(X^2+2) - \frac{1}{4}(X(X+i\sqrt{2})) - \frac{1}{4}X(X-i\sqrt{2})$$

Donc si on note π_0, π_1, π_2 les projecteurs spectraux de A qui correspondent respectivement aux valeurs propres $0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$, on a :

$$\pi_0 = \frac{A^2+2I_3}{2} \qquad \pi_1 = -\frac{1}{4}A(A+i\sqrt{2}I_3) \qquad \pi_2 = -\frac{1}{4}A(A-i\sqrt{2}I_3)$$

d) Pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
A^n &= 0^n \pi_0 + (i\sqrt{2})^n \pi_1 + (-i\sqrt{2})^n \pi_2 \\
&= \frac{-i^n\sqrt{2}^n}{4} A(A+i\sqrt{2}I_3) - \frac{(-1)^n i^n \sqrt{2}^n}{4} A(A-i\sqrt{2}I_3) \\
&= \frac{-i^n\sqrt{2}^n}{4}(1+(-1)^n)A^2 - \frac{i^n\sqrt{2}^n}{4}(i\sqrt{2} - (-1)^n i\sqrt{2}) I_3 \\
&= \alpha_n A^2 + \beta_n A
\end{aligned}$$

avec $\alpha_n = \frac{-i^n\sqrt{2}^n}{4}(1+(-1)^n)$ et $\beta_n = \frac{-i^{n+1}\sqrt{2}^{n+1}}{4}(1-(-1)^n)$

e) On a donc $A^{2n} = \dfrac{-(-1)^n 2^n \cdot 2}{4} A^2$

$$= (-1)^{n-1} 2^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = I_4$

b) $\chi_A(X) = X^4 - 1 = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$

c) Les valeurs propres de A sont :

$1, i, -1, -i$ c-à-d : i^0, i^1, i^2, i^3.

Notons $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ les projecteurs spectraux correspondants.

$$\frac{1}{X^4-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{i}{X-i} - \frac{1}{X+1} - \frac{i}{X+i} \right)$$

donc $1 = \dfrac{1}{4}\left[(X^2+1)(X+1) + i(X^2-1)(X+i) - (X^2+1)(X-1) - i(X^2-1)(X-i) \right]$

On en déduit :

$$\pi_0 = \frac{1}{4}\left(I + A + A^2 + A^3 \right)$$

$$\pi_1 = \frac{1}{4}\left(I - iA - A^2 + iA^3 \right)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{4}\left(I - A + A^2 - A^3 \right)$$

$$\pi_3 = \frac{1}{4}\left(I + iA - A^2 - iA^3 \right)$$

où $I := I_4 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

d) Pour tout t réel, on a :

$$\exp(tA) = e^{t}\Pi_0 + e^{it}\Pi_1 + e^{-t}\Pi_2 + e^{-it}\Pi_3$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{t} + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}\right) I_4$$

$$+ \frac{1}{4}\left(e^{t} - ie^{it} - e^{-t} + ie^{-it}\right) A$$

$$+ \frac{1}{4}\left(e^{t} - e^{it} + e^{-t} - e^{-it}\right) A^2$$

$$+ \frac{1}{4}\left(e^{t} + ie^{it} - e^{-t} - ie^{-it}\right) A^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(ch(t) + \cos t\right) I_4 + \frac{1}{2}\left(sh(t) + \sin t\right) A + \frac{1}{2}\left(ch\,t - \cos t\right) A^2$$

$$+ \frac{1}{2}\left(sh(t) - \sin t\right) A^3.$$

e-f) On pose $Y := \begin{pmatrix} x''' \\ x'' \\ x' \\ x \end{pmatrix}$

$$x^{(4)} = x \iff Y' = AY \iff Y(t) = \exp(tA)\, Y(0)$$

Donc $x(t)$ est le dernier coefficient du vecteur

$$\exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $x(t) = \frac{1}{2}\left(sh(t) + \sin t\right)$

Exercice 3

a) Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc).$$

Son discriminant est : $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$

$$= (a-d)^2 + 4bc$$

$$= 0 \quad \text{par hypothèse.}$$

Donc $\lambda = \frac{a+d}{2}$ est la seule racine de $\chi_A(X)$ i.e. la seule valeur propre de A.

b) On a donc la décomposition de Dunford-Jordan suivante pour A : $A = \frac{a+d}{2} I_2 + N$ où $N = A - \frac{a+d}{2} I_2$ est nilpotente.

Donc : $\exp(A) = \exp\left(\frac{a+d}{2} I_2\right) \exp(N)$

Comme N est nilpotente de taille 2×2, on a forcément : $N^2 = 0$ et $\exp(N) = I_2 + N$.

D'où : $\exp(A) = \exp\left(\frac{a+d}{2}\right)(I_2 + N)$

$$= e^{\frac{a+d}{2}}\left(I_2 + \left(A - \left(\frac{a+d}{2}\right) I_2\right)\right)$$

$$= e^{\frac{a+d}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{a-d}{2}\right) & b \\ c & 1 + \left(\frac{d-a}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 :

a) Polynômes caractéristiques :

$$\chi_A(X) = (X-1)^7 = \chi_B(X)$$

Polynômes minimaux :

$$m_A(X) = (X-1)^3 = m_B(X)$$

b) A et B ne sont pas semblables car

$$(A-I_7)^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & & 0 & & 0 \end{array}\right)$$ est de rang 2

alors que $$(B-I_7)^2 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right)$$ est de rang 1.

ou bien :

(A et B n'ont pas les mêmes formes réduites de Jordan).

Exercice 5 :

```
M=matrix(QQ, 4, 4, [[1,2,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,2,-1]]);

M^(2011);
[    1 4022    0    0]
[    0    1    0    0]
[    0    0   -1    0]
[    0    0 4022   -1]
```

(en effet : $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$

donc $M^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & 0 \\ \hline 0 & B^n \end{array}\right)$ et il est facile de voir que : $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...)