

125

Université Lyon 1
 Math-III-algèbre — semestre d'automne 2010
 Contrôle continu écrit n° 1
 lundi 8 novembre 2010
 durée : 2h
 documents et calculatrices interdits

① Question de cours : Qu'est-ce qu'une matrice diagonalisable? 1

⑤ Exercice 1 Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) La matrice A est-elle diagonalisable? Calculer son polynôme minimal. 1,5
 b) Calculer A^{-1} . 1
 c) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\binom{n}{2} := \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1,5 + 1 pour $n < 0$

⑩ Exercice 2 Soient :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer AB et BA . En déduire que les espaces propres de A sont stables par B . 1 (AB et BA)
+ 2

b) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables? 1+1

c) Trouver les vecteurs qui sont des vecteurs propres à la fois pour A et pour B . 3

d) Trouver une matrice inversible P et deux matrices diagonales D, D' telles que :

$$A = PDP^{-1} \text{ et } B = PD'P^{-1}.$$

Calculer P^{-1} . 1

③,⑤ Exercice 3 Soit E l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles 2×2 :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}.$$

a) Donner une base de E . 1

b) Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $X \in E$, ${}^tAXA \in E$. Donner 0,5
la matrice de l'application linéaire :

$$E \rightarrow E, X \mapsto {}^tAXA$$

1

dans la base trouvée en a).

c) La matrice trouvée en b) est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

1

(5,5) Exercice 4 Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, u(x, y, z) = (2x + 5y - 3z, 2x + y + 4z, -3x - 5y).$$

a) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

0,5

b) Calculer le polynôme caractéristique de u et son polynôme minimal.

1

c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

0,5

d) Trouver un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2(w) \neq 0$. Montrer que $w, (u - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})(w), (u - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2(w)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice de u dans cette base ?

1+1,5+1