Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre de printemps 2010
Contrôle continu écrit n° 2
vendredi 18 juin 2010
durée : 2h
documents et calculatrices interdits

PREMIÈRE PARTIE : TRAVAUX PRATIQUES notée sur 20, coefficient 0,1

Exercice 1 ***Question 1.1*** *Par quelle ligne de commande définiriez-vous la matrice :*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -9 & 13 & 16 \\ -1 & -1 & 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

dans le logiciel sage ?

*

Pour le logiciel sage, on rappelle que la commande « charpoly() »donne le polynôme caractéristique d'une matrice et que la commande « factor() » factorise un polynôme.

Question 1.2 *Que taperiez-vous pour obtenir le polynôme caractéristique factorisé de la matrice M.*

*

Il se trouve que le polynôme caractéristique de M est :

$$\chi_M(X) = (X-2)^2(X-3)^3 \ .$$

On tape les lignes suivantes :

```
x = polygen(QQ);

xgcd((x-3)^3,(x-2)^2);
```

On obtient la réponse suivante à l'écran :

```
(1/9, -1/3*x + 5/9, 1/3*x^2 - 20/9*x + 34/9)
```

Cela signifie que l'on a une relation de Bézout :

$$\frac{1}{9} = (-\frac{1}{3}X + \frac{5}{9})(X-3)^3 + (\frac{1}{3}X^2 - \frac{20}{9}X + \frac{34}{9})(X-2)^2 \ .$$

Question 1.3 *Exprimer les projecteurs spectraux de M comme des polynômes en M.*

Exercice 2 *On suppose que J est une matrice 5×5 à coefficients rationnels et que I est la matrice I_5.*

Lorsque l'on tape :

```
((J-5*I)).right_kernel();  ,
```

le logiciel sage « répond » (traduction) :

```
Espace vectoriel de dimension 3 sur Q
matrice de base :
[   1    0    0    0 -1/3]
[   0    1    1    0  2/3]
[   0    0    0    1 -2/3]
```

ce qui signifie que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

forment une base du noyau $\ker(J - 5I_5)$.

Après avoir tapé les lignes suivantes :

```
(J-4*I).right_kernel();
((J-4*I)**2).right_kernel();
```

on obtient les réponses suivantes :

```
Espace vectoriel de  dimension 1 sur Q
matrice de base :
[  1 1/2   1 1/2   0]
```

puis :

```
Espace vectoriel de dimension  2 sur Q
matrice de base :
[   1  1/2    0   -1  1/2]
[   0    0    1  3/2 -1/2]
```

Quelles sont les dimensions de $\ker(J - 4I_5)$ *et de* $\ker(J - 4I_5)^2$ *? En déduire une matrice de Jordan semblable à la matrice J.*

Deuxième partie : cours et travaux dirigés

Notée sur 20, coefficient 0,4

Exercice 1 *a) Qu'est-ce qu'une matrice orthogonale ?*

b) Les matrices suivantes sont-elles orthogonales :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ?$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} ?$$

c) Combien y a-t-il de matrices réelles orthogonales et diagonales de taille $n \times n$?

Exercice 2 *Soit M la matrice :*

$$M := \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Montrer que le polynôme caractéristique de M est :

$$\chi_M(X) = (X-1)(X+1)^2 .$$

Déterminer le polynôme minimal de M. La matrice M est-elle-diagonalisable ?

b) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton pour M. En déduire une expreession de M^{-1} comme un polynôme en M.

c) Donner une matrice de Jordan semblable à M.

d) Exprimer les projecteurs spectraux de M sous la forme de polynômes en M.

e) Trouver une matrice diagionalisable D et une matrice nilpotente N telles que :

$$DN = ND \text{ et } M = D + N .$$

f) Quel est le plus petit entier $k > 0$ tel que $N^k = 0$. Calculer $\exp(tD)$ et $\exp(tN)$ pour $t \in \mathbb{R}$. En déduire $\exp(tM)$, $t \in \mathbb{R}$.

g) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t) + 4x_3(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + 4x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0 .$$

Exercice 3 *Déterminer les invariants de similitude des matrices :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$