Université Lyon 1
Math-III-Algèbre — semestre de printemps 2009
corrigé du contrôle continu final du jeudi 18 juin 2009

Exercice 1

a) Une matrice N est nilpotente si $N^a = 0$ pour un certain $a > 0$.

b) Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soient $n > 0$ et $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

c) $\chi_N(X) = X^n$ car 0 est la seule valeur propre possible pour N.

d) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $N^n = 0$. De plus $-\mathrm{Tr}N$ est le coefficient devant X^{n-1} dans $\chi_N(X)$. Donc $\mathrm{Tr}N = 0$.

e) $\exp N = 1 + N + \frac{N^2}{2} + ... + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$.

f) Les valeurs propres de $\exp(N)$ sont les $1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + ... + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ où λ est une valeur propre de N. Donc 1 est la seule valeur propre de $\exp N$. D'où : $\mathrm{dét}(\exp N) = 1 = e^0 = e^{\mathrm{Tr}N}$.

g) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de D. La matrice D est semblable à la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $\exp D$ à la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & ... & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

donc :

$$\mathrm{dét}(\exp D) = e^{\lambda_1}...e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + ... + \lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}D} \quad .$$

h) On utilise la décomposition de Jordan-Dunford de A : il existe une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N qui commutent et telles que $A = D + N$. On a alors $\exp A = \exp D \exp N$ car $DN = ND$ et d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\text{dét} \exp A &= \text{dét} \exp D \text{dét} \exp N \\
&= e^{\mathrm{Tr} D} e^{\mathrm{Tr} N} \\
&= e^{\mathrm{Tr} D + \mathrm{Tr} N} \\
&= e^{\mathrm{Tr} A} \quad .
\end{aligned}$$

Exercice 2

a) Si $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, alors $A = P \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}$.

b) On a :

$$\begin{aligned}
\exp tA &= \exp tP \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \exp \begin{pmatrix} -it & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Exercice 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est déjà diagonalisable (2 valeurs propres distinctes).

Exercice 4

a) $\chi_A(X) = X(X-1)^2$ et $P_A(X) = X(X-1)$.

b) Notons π_0 et π_1 les projecteurs spectraux associés respectivement aux valeurs propres 0 et 1. On a $\pi_0 + \pi_1 = 1$ et $0.\pi_0 + 1.\pi_1 = A$ car A est diagonalisable donc :$\pi_0 = 1 - A$ et $\pi_1 = A$.

c) On a :

$$\exp tA = \pi_0 + e^t \pi_1 = (1-A) + e^t A$$

$$= \begin{pmatrix} 7-6e^t & 0 & 21(e^t-1) \\ 2(1-e^t) & e^t & 6(e^t-1) \\ 2(1-e^t) & 0 & 7e^t-6 \end{pmatrix}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d) Si on pose $X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ pour tout t réel, alors :

$$X(t) = \exp tA.X(0)$$

$$= \exp tA. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(0) \end{pmatrix}$$

$$= z(0) \begin{pmatrix} 21(e^t-1) \\ 6(e^t-1) \\ 7e^t-6 \end{pmatrix} .$$

En particulier, $\lim_{t \to -\infty} z(t) = -6z(0) = 1 \Leftrightarrow z(0) = -1$. En conclusion :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 21(1-e^t) \\ 6(1-e^t) \\ 6-7e^t \end{pmatrix} .$$