Université Lyon I

①

Corrigé du contrôle de MATH-III-ALGÈBRE du vendredi 18 juin 2010

Première partie :

Exercice 1

Question 1.1.

$$M = \text{matrix}([[3,1,-2,1,1],[0,4,-2,2,3],[1,2,-2,4,6],[2,3,-9,13,16],[-1,-1,4,-5,-5]])$$

Question 1.2.

$$P = M.\text{charpoly}(); \qquad P.\text{factor}();$$

Question 1.3.

Notons π_2 et π_3 les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres 2 et 3 de M.

On a :

$$1 = (-3X+5)(X-3)^3 + (3X^2-20X+34)(X-2)^2$$

donc $\pi_2 = (-3M+5I_5)(M-3I_5)^3$ et $\pi_3 = (3M^2-20M+34I_5)(M-2I_5)^2$

Exercice 2

On a : $\dim \mathrm{Ker}(J-4I_5) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(J-5I_5)^2 = 2$

J est semblable à la matrice de Jordan suivante :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Deuxième partie

Exercice 1

a) Une matrice orthogonale (réelle, de taille $n \times n$) est une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA . A = I_n$

b) Soient $A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

On a : ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas orthogonale

${}^tBB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc B est orthogonale

c) Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ une matrice réelle diagonale et orthogonale

$${}^tDD = I_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^2 \end{pmatrix} = I_n$$

$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \; d_i^2 = 1 \Leftrightarrow \forall i = 1$ à n, $d_i = \pm 1$

Donc les matrices réelles diagonales et orthogonales de taille $n \times n$ sont les matrices $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ où $d_i = \pm 1$ $(\forall 1 \leq i \leq n)$

Il y en a donc 2^n.

Exercice 2

a) $\chi_M(X) = X^3 + X^2 - X - 1$

$= (X-1)(X^2+2X+1)$

$= (X-1)(X+1)^2$

Le polynôme minimal de M est donc $(X-1)(X+1)$ ou $(X+1)^2(X-1)$

Or $(M-I_3)(M+I_3) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ - & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq 0$

donc $(X-1)(X+1)^2$ est le polynôme minimal de M.

b) D'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$\chi_M(M) = 0$

$\Leftrightarrow M^3 + M^2 - M - I_3 = 0$

$\Leftrightarrow I_3 = M^3 + M^2 - M$

$\Rightarrow M^{-1} = M^{-1}M^3 + M^{-1}M^2 - M^{-1}M$

$\Rightarrow M^{-1} = M^2 + M - I_3$

c) M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) On cherche une relation de Bézout entre $X-1$ et $(X+1)^2$:

$\frac{1}{(X-1)(X+1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{(X+1)^2}$ pour certains a, b, c.

On trouve : $a = \frac{1}{4}$ $b = -\frac{1}{4}$ $c = -3/4$

d'où : $1 = \frac{1}{4}(X+1)^2 - \frac{1}{4}(X+3)(X-1)$

donc : si on note π_{-1} et π_1 les projecteurs spectraux de M associés aux valeurs propres -1 et 1 on a :

$\pi_{-1} = -\frac{1}{4}(M+3I_3)(M-I_3)$ et $\pi_1 = \frac{(M+I_3)^2}{4}$

e) On pose $D = -\Pi_{-1} + \Pi_1 = \frac{1}{4}\left[(M+I_3)^2 + (M+3I_3)(M-I_3)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[2M^2 + 4M - 2I_3\right] = \frac{M^2+2M-I_3}{2}$

et $N = M - D$

$= \frac{-M^2}{2} + \frac{I_3}{2}$

Plus concrètement : $D = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

et $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

f) Le plus petit entier k tel que $N^k = 0$ est $k = 2$

Donc $\exp(tN) = I_3 + tN = \begin{pmatrix} 1+2t & 0 & -4t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1-2t \end{pmatrix}$

et $\exp(tD) = e^{-t}\Pi_{-1} + e^{t}\Pi_1$

Or $\Pi_{-1} = \frac{-1}{4}(M+3I_3)(M-I_3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

et $\Pi_1 = I_3 - \Pi_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

donc : $\exp(tD) = e^{-t}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ainsi : $\exp(tM) = \exp(tN + tD) = \exp(tN)\exp(tD)$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} 3+2t & -2 & -4-4t \\ 1 & 0 & -2 \\ 1+t & -1 & -1-2t \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

g) On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

Le système de l'énoncé devient :

$$\begin{cases} X'(t) = M X(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} X(t) = \exp(tM)\, X(0) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X(t) = \exp(tM)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

Donc $\begin{cases} x_1(t) = -2e^{-t} + 2e^{t} \\ x_2(t) = e^{t} \\ x_3(t) = -e^{-t} + e^{t} \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

Exercice 3 :

Posons $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$XI_3 - I = \begin{pmatrix} X-1 & & \\ & X-1 & \\ & & X-1 \end{pmatrix}$ donc les invariants de similitude de I sont : $X-1, X-1, X-1$

$$XI_3 - J = \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & X-1 & 0 \\ X-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_2 \leftarrow C_2 + (X-1)C_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X-1 & (X-1)^2 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + (X-1)L_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (X-1)^2 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (X-1)^2 \\ 0 & X-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_3 \leftarrow C_3 + (X-1)^2 C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & (X-1)^3 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + (X-1)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-1)^3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (X-1)^3 \end{pmatrix}$$

Donc J a un seul invariant de similitude :

$$(X-1)^3$$