Math III algèbre — corrigé du contrôle du jeudi 22 avril 2010

Exercice 1

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & X & 1 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ X & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \end{vmatrix}$

$$= X(X^3+X) + (X^2+1)$$

$$= X^4 + 2X^2 + 1$$

$$\underline{= (X^2+1)^2}$$

b) $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{\pm i\}$

c) $\mathrm{Ker}(M - iI_4)$?

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ix \\ -z = iy \\ y = iz \\ -x = it \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = it \\ y = iz \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(M - iI_4) = \left\{ \begin{pmatrix} it \\ iz \\ z \\ t \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{C} \right\}$

$$\underline{= \mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

De même :

$$\underline{\mathrm{Ker}(M + iI_4) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Donc $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de vecteurs propres et M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

d) M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $Sp_{\mathbb{R}} M = \emptyset$

Exercice 2

a) rang $A = 1$

b) D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} A = 4 - 1 = 3$

c) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\\8\\8\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est propre pour A. La valeur propre associée est 8.

d) $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Ker}(A - 8I_4) \geq 3 + 1 = 4$

Donc $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A - 8I_4) = \mathbb{K}^4$ et A est diagonalisable.

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z + 2t = 0 \Leftrightarrow -(x + y + z) = t$

Donc $\operatorname{Ker} A = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Or $\underline{\dim \operatorname{Ker}(A - 8I_4) = 1}$ et $\underline{\operatorname{Ker}(A - 8I_4) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}$

D'où une base de vecteurs propres :

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

e) $\chi_A(X) = X^3(X - 8)$

$m_A(X) = X(X - 8)$ (car A diagonalisable)

Exercice 3

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour seule valeur propre : 1.

Donc $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à l'identité : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c-à-d si et seulement si elle est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisable $\Leftrightarrow \underline{\alpha = 0}$.

Exercice 4

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\chi_A(X) = X^3 - 2X = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

En particulier : $\det A = 0$ et A n'est pas inversible

b) La matrice A a 3 valeurs propres distinctes : $0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Donc A est diagonalisable

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$ Donc $\operatorname{Ker} A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - \sqrt{2} I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x+z = \sqrt{2}y \\ y = \sqrt{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \sqrt{2}x \end{cases}$ Donc $\underline{\operatorname{Ker}(A - \sqrt{2} I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$

De même $\underline{\operatorname{Ker}(A + \sqrt{2} I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$

Conclusion : $A = PDP^{-1}$ où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Exercice 5

Soient $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\chi_A(X) = \chi_B(X) = (X-1)^2(X-2)$.

<u>$\mathrm{Ker}(A - I_3)$?</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = x \\ y = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$$

Donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 1 < 2$

et <u>A n'est pas diagonalisable.</u>

En revanche :

<u>$\mathrm{Ker}(B - I_3)$?</u> $\quad B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 2x + 2y = y \\ z = z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow y + 2x = 0$$

D'où : $\mathrm{Ker}(B - I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dim \mathrm{Ker}(B - I_3) = 2$

et <u>B est diagonalisable.</u>

En particulier, <u>A n'est pas semblable à B.</u>

Exercice 6

$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\chi_{I_4}(X) = \chi_B(X) = \chi_C(X) = \chi_D(X) = (X-1)^4$; $\quad m_{I_4}(X) = X - 1$, $m_B(X) = (X-1)^4$, $m_C(X) = m_D(X) = (X-1)^2$

b) $C - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ d'où $\mathrm{rang}(C - I_4) = 2 \neq \mathrm{rang}(D - I_4) = 1$

En particulier, <u>C n'est pas semblable à D.</u>

(sinon : $C = PDP^{-1} \Rightarrow C - I_4 = P(D-I_4)P^{-1}$

$\Rightarrow \text{rang}(C-I_4) = \text{rang}(D-I_4)$)

Exercice 7

a) Si $\lambda_0 v + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v) = 0$

alors $u^{n-1}(\lambda_0 v + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v)) = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 u^{n-1}(v) + 0 + \cdots + 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 u^{n-1}(v) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0.$

Donc $\lambda_1 u(v) + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v) = 0$

On applique u^{n-2} :

$\lambda_1 u^{n-1}(v) + 0 + \cdots + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

donc $\lambda_2 u^2(v) + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v) = 0$

On applique u^{n-3} ... on trouve $\lambda_2 = 0$.

Et ainsi de suite ...

Conclusion: <u>$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$</u>

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Comme $\mathcal{B}$ a n éléments et $n = \dim \mathbb{K}^n$, on a bien que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$

b) $\text{Mat}(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 & 0 \end{pmatrix}$.