Université Lyon I

MATH-III-ALGÈBRE
CORRIGÉ DU PARTIEL DU 9/4/19

Exercice 1 :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \end{pmatrix}$

est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

$$1, 6, 10, 13, 15.$$

Cela fait 5 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable

Exercice 2

a) $\chi_A(X) = (X-1)^3$

$m_A(X)$ divise $\chi_A(X)$ donc $m_A(X) = X-1, (X-1)^2$ ou $(X-1)^2$

Or $A - I_3 \neq 0$ et $(A-I_3)^2 = 0$ donc $m_A(X) = (X-1)^2$.

b) A n'est pas diagonalisable car son polynôme minimal a 1 comme racine double

c) A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

a) $\chi_{R(t)}(X) = X^2 - 2\cos t\, X + 1 = (X-e^{it})(X-e^{-it})$

b) $R(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = R(-t)$

c) Les valeurs propres de $R(t)$ sont e^{it} et e^{-it}

Si $t = 0 \mod \pi$, alors $R(t) = \begin{cases} I_2 & \text{si } t = 0 \mod 2\pi \\ -I_2 & \text{si } t = \pi \mod 2\pi \end{cases}$

Si $t \neq 0 \mod \pi$, $R(t)$ a 2 valeurs propres distinctes et $\operatorname{Ker}(R(t) - e^{it} I_2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Ker}(R(t) - e^{-it} I_2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Donc $R(t) = PDP^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$

Excercice 4

a) $\chi_B(X) = X(X-1)(X-16)$

Donc les valeurs propres de B sont

$$0, 1, 16$$

b) $E_0 := \operatorname{Ker} B = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_1 := \operatorname{Ker}(B - I_3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{16} := \operatorname{Ker}(B - 16 I_3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $B = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

c) $AB = A \cdot A^2 = A^3 = A^2 A = BA$

d) Soit λ une valeur propre de B.

Soit $Y \in \operatorname{Ker}(B - \lambda I_3)$.

On va montrer que $AY \in \operatorname{Ker}(B - \lambda I_3)$:

$$\begin{aligned} BAY &= ABY && (\text{car } AB = BA) \\ &= A(\lambda Y) && (\text{car } Y \in \operatorname{Ker}(B - \lambda I_3)) \\ &= \lambda(AY) && (\text{car } A \text{ est linéaire}) \end{aligned}$$

donc $AY \in \operatorname{Ker}(B - \lambda I_3)$.

e) Soit (v_1, v_2, v_3) une base de vecteurs propres de B.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres correspondantes.

On peut prendre $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 16$.

On a alors $\operatorname{Ker}(B - \lambda_i I_3) = \mathbb{C} v_i$

D'après d) $A v_i \in \mathbb{C} v_i \quad (\forall\, 1 \leq i \leq 3)$

Donc (v_1, v_2, v_3) est aussi une base de vecteurs propres de A

f) Soient $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}$ tels que

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Alors $d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1^2 = 0 \\ d_2^2 = 1 \\ d_3^2 = 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad d_1 = 0, \ d_2 = \pm 1, \ d_3 = \pm 4$

Donc les matrices diagonales d telles que $d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

g) D'après b) et e), les

vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

forment une base de vecteur propres de A et de B.

Donc si on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A = P d P^{-1}$ où d est une matrice diagonale.

Ainsi $A^2 = B \iff P d^2 P^{-1} = P D P^{-1}$

$\iff d^2 = D$

$\iff d = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = B \iff A = P d P^{-1}$

où $d \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix} \right.$

ce qui fait 4 solutions.