Université Lyon 1
Algèbre III – diagonalisation et applications
semestre d'automne 2011-2012
Contrôle final
mardi 17 janvier 2012
durée : 2h
documents et calculatrices interdits

Question de cours : Soit A une matrice $n \times n$. Donner (sans démonstration) une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal de A pour que A soit diagonalisable.

Exercice 1 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

b) Calculer les puissances A^n, $n \geq 1$.

c) Montrer que la suite

$$\frac{1}{2^n} A^n$$

admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 2 *Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.*

Soit $f : E \to E$ l'application linéaire définie par :

$$f(P(x)) = xP'(x) - P(x+1) \ .$$

a) Choisir une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

b) Déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

c) L'endomorphisme f est-il inversible ?

Exercice 3 *Soit A la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} .$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b) Quel est le polynôme minimal de A ?

c) Exprimer les projecteurs spectraux de A comme des polynômes en A.

d) Exprimer en fonction de A une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N telles que $A = D + N$ et $DN = ND$.

e) Exprimer $\exp(tA)$ en fonction de t et des projecteurs spectraux de A.

f) Résoudre le système différentiel (en la variable t) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & 3x_1(t) + 2x_2(t) - 6x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) \qquad\qquad\quad - 2x_3(t) \\ x_3'(t) & = & 2x_1(t) + x_2(t) - 4x_3(t) \end{array} \right.$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = x_3(0) = 0.$$