Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre d'automne 2010-2011
Contrôle final
jeudi 20 janvier 2011
13h45 - 15h45
documents et calculatrices interdits

2 **Question de cours :** Énoncer le théorème de décomposition de Dunford-Jordan ?

5 **Exercice 1** *Soit*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 *a) Calculer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X)$.*

0,5 *b) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\frac{1}{\chi_A(X)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - i\sqrt{2}} + \frac{b}{X + i\sqrt{2}}.$$

1 *c) Exprimer les projecteurs spectraux de A en fonction de A.*

1,5 *d) Pour tout $n > 0$, déterminer des réels α_n, β_n tels que :*

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A.$$

1 *e) Calculer les coefficients de la matrice A^{2n} pour $n > 0$.*

8,5 **Exercice 2** *Soit :*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 *a) Calculer A^2, A^3, A^4.*

1,5 *b) Calculer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X)$.*

2 *c) Exprimer les projecteurs spectraux de A comme des polynômes en A.*

2 *d) Montrer que pour tout t réel, on a :*

$$\exp(tA) = \frac{1}{2}(\cosh t + \cos t)I_4$$
$$+\frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)A$$
$$+\frac{1}{2}(\cosh t - \cos t)A^2$$
$$+\frac{1}{2}(\sinh t - \sin t)A^3$$

où : $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ *et* $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$.

2 e) ~~f)~~ *Trouver la fonction* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *4 fois dérivable, qui vérifie :*

$$x^{(4)} = x\,,\; x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 1\ .$$

3,5 **Exercice 3** *Soit* $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice réelle. On pose* $\Delta := (a-d)^2 + 4bc$.

On suppose dans cet exercice que $\Delta = 0$.

1 *a) Montrer que* A *n'a qu'une seule valeur propre.*

2,5 *b) En déduire la formule suivante :*

$$\exp(A) = e^{\frac{a+d}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{a-d}{2} & b \\ c & 1 - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

4 **Exercice 4** *a) Déterminer les polynômes caractéristiques et minimaux des matrices suivantes :*

1 (pour $m_A(x)$ et $m_B(x)$)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 *b) Les matrices* A *et* B *sont-elles semblables ?*

3 **Exercice 5** *(Cet exercice porte sur les t.p. sage, il est facultatif pour ceux qui ont une dispense d'assiduité)*

*

1 *a) Comment définir la matrice suivante avec le logiciel sage :*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ ?$$

0,5 *b) Quelle commande taper pour calculer* M^{2011} *?*

1,5 *c) Quel résultat obtient-on si tout marche bien ?*