MATH-III-ALGÈBRE

Cours :

Théorème : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe un unique couple (D,N), où D est diagonalisable, N nilpotente, tel que :

$DN = ND$ et $A = D+N$.

Exercice 1 :

a) $\chi_A(X) = X^3+2X = X(X+i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})$

b) $$\frac{1}{X^3+2X} = \frac{\frac{1}{2}}{X} - \frac{\frac{1}{4}}{X-i\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{X+i\sqrt{2}}$$

c) On a une relation de Bézout :

$$1 = \frac{1}{2}(X^2+2) - \frac{1}{4}(X(X+i\sqrt{2})) - \frac{1}{4}X(X-i\sqrt{2})$$

Donc si on note π_0, π_1, π_2 les projecteurs spectraux de A qui correspondent respectivement aux valeurs propres $0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$, on a :

$$\pi_0 = \frac{A^2+2I_3}{2} \qquad \pi_1 = -\frac{1}{4}A(A+i\sqrt{2}I_3) \qquad \pi_2 = -\frac{1}{4}A(A-i\sqrt{2}I_3)$$

d) Pour tout $n \geq 0$,

$$A^n = 0^n\pi_0 + (i\sqrt{2})^n\pi_1 + (-i\sqrt{2})^n\pi_2$$
$$= \frac{-i^n\sqrt{2}^n}{4}A(A+i\sqrt{2}I_3) - \frac{(-1)^n i^n\sqrt{2}^n}{4}A(A-i\sqrt{2}I_3)$$
$$= \frac{-i^n\sqrt{2}^n}{4}(1+(-1)^n)A^2 - \frac{i^n\sqrt{2}^n}{4}(i\sqrt{2}-(-1)^n i\sqrt{2})I_3$$
$$= \alpha_n A^2 + \beta_n A$$

avec $\alpha_n = \frac{-i^n\sqrt{2}^n}{4}(1+(-1)^n)$ et $\beta_n = \frac{-i^{n+1}\sqrt{2}^{n+1}}{4}(1-(-1)^n)$

e) On a donc $A^{2n} = \dfrac{-(-1)^n 2^n \cdot 2}{4} A^2$

$$= (-1)^{n-1} 2^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = I_4$

b) $\chi_A(X) = X^4 - 1 = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$

c) Les valeurs propres de A sont :

$1, i, -1, -i$ c-à-d: i^0, i^1, i^2, i^3.

Notons $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ les projecteurs spectraux correspondants.

$$\frac{1}{X^4-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{i}{X-i} - \frac{1}{X+1} - \frac{i}{X+i} \right)$$

donc $1 = \frac{1}{4}\left[(X^2+1)(X+1) + i(X^2-1)(X+i) - (X^2+1)(X-1) - i(X^2-1)(X-i) \right]$

On en déduit :

$\pi_0 = \frac{1}{4}(I + A + A^2 + A^3)$

$\pi_1 = \frac{1}{4}(I - iA - A^2 + iA^3)$

$\pi_2 = \frac{1}{4}(I - A + A^2 - A^3)$

$\pi_3 = \frac{1}{4}(I + iA - A^2 - iA^3)$

où $I := I_4 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

d) Pour tout t réel, on a :

$$\exp(tA) = e^{t}\Pi_0 + e^{it}\Pi_1 + e^{-t}\Pi_2 + e^{-it}\Pi_3$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{t}+e^{-t}+e^{it}+e^{-it}\right)I_4$$

$$+\frac{1}{4}\left(e^{t}-ie^{it}-e^{-t}+ie^{-it}\right)A$$

$$+\frac{1}{4}\left(e^{t}-e^{it}+e^{-t}-e^{-it}\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4}\left(e^{t}+ie^{it}-e^{-t}-ie^{-it}\right)A^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(ch(t)+\cos t\right)I_4 + \frac{1}{2}\left(sh(t)+\sin t\right)A + \frac{1}{2}\left(ch\,t-\cos t\right)A^2 + \frac{1}{2}\left(sh(t)-\sin t\right)A^3.$$

e-f) On pose $Y := \begin{pmatrix} x''' \\ x'' \\ x' \\ x \end{pmatrix}$

$$x^{(4)} = x \Leftrightarrow Y' = AY \Leftrightarrow Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

Donc $x(t)$ est le dernier coefficient du vecteur

$$\exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $x(t) = \frac{1}{2}\left(sh(t)+\sin t\right)$

Exercice 3

a) Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc).$$

Son discriminant est : $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$
$= (a-d)^2 + 4bc$
$= 0$ par hypothèse.

Donc $\lambda = \frac{a+d}{2}$ est la seule racine de $\chi_A(X)$ i.e. la seule valeur propre de A.

b) On a donc la décomposition de Dunford-Jordan suivante pour A : $A = \frac{a+d}{2} I_2 + N$ où $N = A - \frac{a+d}{2} I_2$ est nilpotente.

Donc : $\exp(A) = \exp\left(\frac{a+d}{2} I_2\right) \exp(N)$

Comme N est nilpotente de taille 2×2, on a forcément : $N^2 = 0$ et $\exp(N) = I_2 + N$.

D'où :
$$\exp(A) = \exp\left(\frac{a+d}{2}\right)(I_2 + N)$$
$$= e^{\frac{a+d}{2}}\left(I_2 + \left(A - \left(\frac{a+d}{2}\right) I_2\right)\right)$$
$$= e^{\frac{a+d}{2}} \begin{pmatrix} 1+\left(\frac{a-d}{2}\right) & b \\ c & 1+\left(\frac{d-a}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 :

a) Polynômes caractéristiques :

$$\chi_A(X) = (X-1)^7 = \chi_B(X)$$

Polynômes minimaux :

$$m_A(X) = (X-1)^3 = m_B(X)$$

b) A et B ne sont pas semblables car

$$(A-I_7)^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & & 0 & & 0 \end{array}\right)$$ est de rang 2

alors que $$(B-I_7)^2 = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right)$$ et de rang 1.

ou bien :

(A et B n'ont pas les mêmes formes réduites de Jordan).

Exercice 5 :

```
M=matrix(QQ, 4, 4, [[1,2,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,2,-1]]);

M^(2011);
[    1 4022    0    0]
[    0    1    0    0]
[    0    0   -1    0]
[    0    0 4022   -1]
```

(en effet : $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$

donc $M^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & 0 \\ \hline 0 & B^n \end{array}\right)$ et il est facile de voir que : $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...)