Université Lyon 1
Math-III-Algèbre — semestre de printemps 2009
Contrôle continu final
jeudi 18 juin 2009
durée : 2h
documents autorisés, calculatrices interdites

Exercice 1

a) Rappeler la définition d'une matrice nilpotente.

b) Donner un exemple de matrice non nulle N, de taille 3×3, vérifiant $N^2 = 0$ et un exemple vérifiant $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$.

Soient $n > 0$ et $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

c) Quel est le polynôme caractéristique de N ?

d) Montrer que $N^n = 0$ et que la trace de N : $\mathrm{Tr}N$ est nulle.

e) Exprimer $\exp N$ comme un polynôme de degré $n-1$ en N.

f) Quelles sont les valeurs propres de $\exp N$? Montrer que $\text{dét}(\exp N) = e^{\mathrm{Tr}N}$.

Soit D une matrice diagonalisable.

g) Montrer que $\text{dét}(\exp D) = e^{\mathrm{Tr}D}$.

h) Montrer que $\text{dét}(\exp A) = e^{\mathrm{Tr}A}$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

a) Diagonaliser (sur $\mathbb{C}$) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp tA = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} .$$

Exercice 3

Donner la décomposition de Jordan-Dunford des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 4
Soit

$$A := \begin{pmatrix} -6 & 0 & 21 \\ -2 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} .$$

a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
b) Déterminer les projecteurs spectraux de A.
c) Exprimer les coefficients de la matrice $\exp tA$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
d) Trouver les fonctions x, y, z réelles telles que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = -6x(t) + 21z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + 6z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 7z(t) \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 0 \text{ et } \lim_{t \to -\infty} z(t) = 6 .$$