Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre d'automne 2010-2011
Contrôle final
jeudi 20 janvier 2011
13h45 - 15h45
documents et calculatrices interdits

Question de cours : Énoncer le théorème de décomposition de Dunford-Jordan ?

Exercice 1 *Soit*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X)$.
b) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{\chi_A(X)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - i\sqrt{2}} + \frac{b}{X + i\sqrt{2}} .$$

c) Exprimer les projecteurs spectraux de A en fonction de A.
d) Pour tout $n > 0$, déterminer des réels α_n, β_n tels que :

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A .$$

e) Calculer les coefficients de la matrice A^{2n} pour $n > 0$.

Exercice 2 *Soit :*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Calculer A^2, A^3, A^4.
b) Calculer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X)$.
c) Exprimer les projecteurs spectraux de A comme des polynômes en A.
d) Montrer que pour tout t réel, on a :

$$\begin{aligned} \exp(tA) = {} & \frac{1}{2}(\cosh t + \cos t) I_4 \\ & + \frac{1}{2}(\sinh t + \sin t) A \\ & + \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t) A^2 \\ & + \frac{1}{2}(\sinh t - \sin t) A^3 \end{aligned}$$

où : $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ *et* $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$.

f) Trouver la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *4 fois dérivable, qui vérifie :*

$$x^{(4)} = x \, , \, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 1 \ .$$

Exercice 3 *Soit* $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice réelle. On pose* $\Delta := (a-d)^2 + 4bc$.

On suppose dans cet exercice que $\Delta = 0$.

a) Montrer que A *n'a qu'une seule valeur propre.*

b) En déduire la formule suivante :

$$\exp(A) = e^{\frac{a+d}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{a-d}{2} & b \\ c & 1 - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 4 *a) Déterminer les polynômes caractéristiques et minimaux des matrices suivantes :*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) Les matrices A *et* B *sont-elles semblables ?*

Exercice 5 *(Cet exercice porte sur les t.p. sage, il est facultatif pour ceux qui ont une dispense d'assiduité)*

*

a) Comment définir la matrice suivante avec le logiciel sage :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} ?$$

b) Quelle commande taper pour calculer M^{2011} *?*

c) Quel résultat obtient-on si tout marche bien ?