

MATH-III-ALGÈBRE

Cours :

Théorème : si $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors il existe un unique couple
 (D, N) ,

où D est diagonalisable, N nilpotente, tel que :

$$DN = ND \text{ et } A = D + N.$$

Exercice 1 :

$$a) \chi_A(X) = X^3 + 2X = X(X + i\sqrt{2})(X - i\sqrt{2})$$

$$b) \frac{1}{X^3 + 2X} = \frac{\frac{1}{2}}{X} - \frac{\frac{1}{4}}{X - i\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{X + i\sqrt{2}}$$

c) On a une relation de Bézout :

$$1 = \frac{1}{2}(X^2 + 2) - \frac{1}{4}(X(X + i\sqrt{2})) - \frac{1}{4}X(X - i\sqrt{2})$$

Donc si on note π_0, π_1, π_2 les projecteurs spectraux de A qui correspondent respectivement aux valeurs propres $0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$,

on a :

$$\pi_0 = \frac{A^2 + 2I_3}{2} \quad \pi_1 = \frac{-1}{4} A(A + i\sqrt{2}I_3) \quad \pi_2 = \frac{-1}{4} A(A - i\sqrt{2}I_3)$$

d) Pour tout $m \geq 0$,

$$\begin{aligned} A^m &= 0^m \pi_0 + (i\sqrt{2})^m \pi_1 + (-i\sqrt{2})^m \pi_2 \\ &= \frac{-i^m \sqrt{2}^m}{4} A(A + i\sqrt{2}I_3) - \frac{(-1)^m i^m \sqrt{2}^m}{4} A(A - i\sqrt{2}I_3) \\ &= \frac{-i^m \sqrt{2}^m (1 + (-1)^m)}{4} A^2 - \frac{-i^m \sqrt{2}^m (i\sqrt{2} - (-1)^m i\sqrt{2})}{4} I_3 \\ &= \alpha_m A^2 + \beta_m A \end{aligned}$$

$$\text{avec } \alpha_m = \frac{-i^m \sqrt{2}^m (1 + (-1)^m)}{4} \text{ et } \beta_m = \frac{-i^{m+1} \sqrt{2}^{m+1} (1 - (-1)^m)}{4}$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad \text{On a donc } A^{2m} &= \frac{-(-1)^m 2^m}{4} \cdot 2 A^2 \\
 &= (-1)^{m-1} 2^{m-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2

$$a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = I_4$$

$$b) \quad \chi_A(X) = X^4 - 1 = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$$

c) Les valeurs propres de A sont :

$$1, i, -1, -i \quad \text{c-a-d: } i^0, i^1, i^2, i^3.$$

Notons $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ les projecteurs spectraux correspondants.

$$\frac{1}{X^4-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{i}{X-i} - \frac{1}{X+1} - \frac{i}{X+i} \right)$$

$$\text{donc } 1 = \frac{1}{4} \left[\frac{(X^2+1)(X+1)}{(X-1)(X-i)} + i \frac{(X^2-1)(X+i)}{(X-1)(X-i)} - \frac{(X^2+1)(X-1)}{(X+1)(X+i)} - i \frac{(X^2-1)(X-i)}{(X+1)(X+i)} \right]$$

On en déduit :

$$\pi_0 = \frac{1}{4} (I + A + A^2 + A^3)$$

$$\pi_1 = \frac{1}{4} (I - iA - A^2 + iA^3)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{4} (I - A + A^2 - A^3)$$

$$\pi_3 = \frac{1}{4} (I + iA - A^2 - iA^3)$$

$$\text{ou } I := I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Pour tout t réel, on a:

$$\begin{aligned}
 \exp(tA) &= e^{t\pi_0} + e^{it\pi_1} + e^{-t\pi_2} + e^{-it\pi_3} \\
 &= \frac{1}{4} \left(e^t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it} \right) I \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(e^t - ie^{it} - e^{-t} + ie^{-it} \right) A \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(e^t - e^{it} + e^{-t} - e^{-it} \right) A^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(e^t + ie^{it} - e^{-t} - ie^{-it} \right) A^3 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}(t) + \cos t \right) I + \frac{1}{2} \left(\operatorname{sh}(t) + \sin t \right) A + \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} t - \cos t \right) A^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(\operatorname{sh}(t) - \sin t \right) A^3.
 \end{aligned}$$

f) On pose $Y := \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ x''' \end{pmatrix}$

$$x^{(4)} = x \Leftrightarrow Y' = AY \Leftrightarrow Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

Donc $x(t)$ est le premier coefficient du vecteur

$$\exp(tA) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $x(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(t) + \sin t)$

Exercice 3

a) Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc).$$

$$\begin{aligned} \text{Son discriminant est : } \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad-bc) \\ &= (a-d)^2 + 4bc \\ &= 0 \quad \text{par hypothèse.} \end{aligned}$$

Donc $\lambda = \frac{a+d}{2}$ est la seule racine de $\chi_A(X)$ i.e. la seule valeur propre de A .

b) On a donc la décomposition de Dunford-Jordan suivante pour A : $A = \frac{a+d}{2} I_2 + N$ où $N = A - \frac{a+d}{2} I_2$ est nilpotente.

$$\text{Donc : } \exp(A) = \exp\left(\frac{a+d}{2} I_2\right) \exp(N)$$

Comme N est nilpotente de taille 2×2 , on a forcément : $N^2 = 0$ et $\exp(N) = I_2 + N$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \exp(A) &= \exp\left(\frac{a+d}{2}\right) (I_2 + N) \\ &= e^{\frac{a+d}{2}} \left(I_2 + \left(A - \left(\frac{a+d}{2}\right) I_2 \right) \right) \\ &= e^{\frac{a+d}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{a-d}{2} & b \\ c & 1 + \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

a) Polynômes caractéristiques :

$$\chi_A(X) = (X-1)^7 = \chi_B(X)$$

Polynôme minimal :

$$m_A(X) = (X-1)^3 = m_B(X)$$

b) A et B ne sont pas semblables car

$$(A - I_7)^2 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ est de rang } 2$$

alors que $(B - I_7)^2 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ est de rang } 1.$

(A et B n'ont pas les mêmes formes réduites de Jordan).

Exercice 5 :

```
M=matrix(QQ, 4, 4, [[1,2,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,2,-1]]);
```

```
M^(2011);
```

```
[ 1 4022 0 0]
```

```
[ 0 1 0 0]
```

```
[ 0 0 -1 0]
```

```
[ 0 0 0 4022 -1]
```