Question de cours :

Soit $A \in M_n(K)$ où K est un corps.

La matrice A est diagonalisable sur K si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur K à racines simples.

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $\chi_A(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

Donc A est diagonalisable et ses valeurs propres sont

$\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 2$

On a : $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = x \\ 3x - y = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad 3x - 2y = 0$

Donc les vecteurs propres de A associés à $\lambda_1 = 1$ sont les multiples non nuls de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a : $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2x \\ 3x - y = 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = y.$

Les vecteurs propres de A associés à $\lambda_2 = 2$ sont les multiples non nuls de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) On a : $A = PDP^{-1}$

où $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

Donc $A^n = PD^nP^{-1}$

$= P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}P^{-1}$

Or $P^{-1} = -\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

Ainsi : $A^n = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2 & 2^n\\ 3 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-2+3.2^n & 2-2^{n+1}\\ -3+3.2^n & 3-2^{n+1}\end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2^n}A^n = \begin{pmatrix}-2^{1-n}+3 & 2^{1-n}-2\\ -3.2^{-n}+3 & 3.2^{-n}-2\end{pmatrix}$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}A^n = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

Remarque : Si on note π_1, π_2 les projecteurs spectraux associés à λ_1 et λ_2, On a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}A^n = \pi_2$.

En effet : $A^n = \pi_1 + 2^n\pi_2$ $(\forall n \geq 0)$

Exercice 2

a) On peut choisir pour base de E :

$\mathcal{B} := 1, x, \dots, x^n$

Si $0 \leq k \leq n$, alors $f(x^k) = kx^k - (x+1)^k$

$$= kx^k - \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i$$

$$= (k-1)x^k - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i .$$

Donc dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de f est la matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ & 0 & -2 & -3 & \cdots & -n \\ & & 1 & & -\binom{k}{i} & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

b) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres se lisent sur la diagonale : $-1, 0, 1, \dots, n-1$.

Comme E est de dimension $n+1$ et comme f a $n+1$ valeurs propres distinctes, f est diagonalisable

c) L'endomorphisme f n'est pas inversible car 0 est une valeur propre de f $(\operatorname{Ker} f \neq \{0\})$

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

a) On a : $\chi_A(X) = X^3 + X^2$
$= X^2(X+1)$

b) Le polynôme minimal de A est $X(X+1)$ ou $X^2(X+1)$

Or $A(A+I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq 0$$

donc $X^2(X+1)$ est le polynôme minimal de A.

c) On cherche une relation de Bézout entre X^2 et $X+1$.

On a : $\dfrac{1}{X^2(X+1)} = \dfrac{aX+b}{X^2} + \dfrac{c}{X+1}$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

On trouve : $c = 1$

et $b = 1$

d'où : $a = -1$

On a donc :

$$1 = (-X+1)(X+1) + X^2$$

Par conséquent : si on note π_0, π_1 les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres 0 et −1 de A, on a :

$$\underline{\pi_0 = (-A+I_3)(A+I_3)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \underline{\pi_1 = A^2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $D = 0 . \pi_0 - \pi_1 = -A^2$

$N = A - D = A + A^2$

e) On a $\exp(tA) = \exp(tD)\exp(tN)$

$$= (\pi_0 + e^{-t}\pi_1)\,((I+tA)\pi_0 + \pi_1)$$

$$= (I+tA)\pi_0 + e^{-t}\pi_1$$

f)

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1 + tA)\,\pi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t}\,\pi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + tA \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 2t - e^{-t} \\ 1 \quad - e^{-t} \\ 1 + t - e^{-t} \end{pmatrix}$$