Université Lyon 1
Math-III-Algèbre — semestre de printemps 2009
Examen partiel
jeudi 9 avril 2009
durée : 2h
documents autorisés, calculatrices interdites

Exercice 1
La matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable ?

Exercice 2
Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
c) Est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}, sinon passer à un autre exercice.

Exercice 3
Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $R(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de $R(t)$.
b) Calculer l'inverse de $R(t)$.
c) Montrer que $R(t)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et déterminer une matrice P inversible indépendante de t et une matrice diagonale D telle que :
$$R(t) = PDP^{-1}$$

d) Pour quels $t \in \mathbb{R}$, la matrice $R(t)$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
On pose

$$B := \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Trouver les valeurs propres de B.
b) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que :

$$B = PDP^{-1} \ .$$

c) On suppose qu'il existe une matrice complexe A telle que $A^2 = B$.
Montrer que A et B commutent.
d) On suppose toujours que $A^2 = B$. Montrer que A laisse stable les espaces propres de B.
e) Montrer que toute base de vecteurs propres de B est aussi une base de vecteurs propres de A.
f) Trouver toutes les matrices diagonales d telles que :

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \ .$$

g) Combien y a-t-il de matrices A telles que $A^2 = B$?