Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre de printemps 2010
Contrôle continu écrit n° 1
jeudi 22 avril 2010
durée : 2h
documents et calculatrices interdits

Exercice 1 *Soit la matrice* $M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de M *est :*

$$\chi_M(X) = (X^2+1)^2 \ .$$

b) Quelles sont les valeurs propres complexes de M *?*

c) La matrice M *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *? si oui, donner une base de vecteurs propres.*

d) La matrice M *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 2 *Soit* A *la matrice réelle* $:= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le rang de A *?*

b) Quelle est la dimension de $\ker A$ *?*

c) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* A*. Quelle est la valeur propre associée ?*

d) Montrer que A *est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de* A*.*

e) Quel est le polynôme caractéristique de A *? Quel est son polynôme minimal ?*

Exercice 3 *Pour quelle(s) valeur(s) de* α *la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 4 *Soit* $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\chi_A(X)$. La matrice A est-elle inversible ?
b) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = PDP^{-1} \ .$$

Exercice 5 *Les matrices suivantes sont elles semblables*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ?$$

Exercice 6 *a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de chacune des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) Les deux dernières matrices de la liste ci-dessus sont-elles semblables ? Indication : Noter A une des deux matrices, et calculer $\mathrm{rang}(A - I_4)$.

Exercice 7 *Soit $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire. On suppose que $u^n = 0$ et que $u^{n-1} \neq 0$.*
a) Soit $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $u^{n-1}(v) \neq 0$. Montrer que la famille :

$$\mathscr{B} := \{v, u(v), ..., u^{n-1}(v)\}$$

est une base de $\mathbb{K}^n$.
b) Quelle est la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$?