Corrigé de l'examen partiel de Math-III-algèbre du lundi 8/11/10

Exercice 1

a) $\chi_A(X) = (X-1)^3$

La seule valeur propre de A est : 1.

Si A était diagonalisable, A serait semblable à $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} = I_3$

donc égale à I_3. Or $A \neq I_3$ donc A n'est pas diagonalisable.

Le polynôme minimal de A est :

$m_A(X) = X-1$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$.

$A \neq I_3$, $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \neq 0$ donc $m_A(X) = (X-1)^3$.

b) On a : $\det A = 1$ donc A est inversible et :

$$A^{-1} = {}^t\hat{A} \quad \text{où } \hat{A} \text{ est la comatrice de } A.$$

Donc : $A^{-1} = {}^t\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) Par récurrence sur $n \geq 0$, on montre que

$$A^n = \begin{pmatrix}1&n&\binom{n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Pour $n=0$: $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Si c'est vrai pour n, alors $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix}1&n&\binom{n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&n+1&n+\binom{n}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n+1&\binom{n+1}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Si $n<0$: $A^n = \left(A^{-n}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1&-n&\binom{-n}{2}\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix}1&+n&n^2-\binom{-n}{2}\\0&1&+n\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n&\binom{n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n^2-\binom{-n}{2} &= n^2-\frac{(-n)(-n-1)}{2}\\ &= n^2-\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n\left(n-\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)\\ &= n\left(\frac{n-1}{2}\right)\\ &= \binom{n}{2}\end{aligned}}$$

Exercice 2.

a) $AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = BA$

Soit λ une valeur propre de A.

Soit $E_\lambda := \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ l'espace propre associé.

Alors si $x \in E_\lambda$, $ABx = BAx = B(\lambda x) = \lambda Bx$

Donc $Bx \in E_\lambda$; et cela est vrai pour tout $x \in E_\lambda$.

Donc E_λ est stable par B.

b) $\chi_A(X) = X^3 - tr(A)X^2 + \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 0 \\ & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) X - \det A$

$= X^3 - 5X^2 + 8X - 4$

$= (X-1)(X^2 - 4X + 4)$

$= (X-1)(X-2)^2$.

Donc A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\dim E_2(A) = 2$

où $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$

Or si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $x \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 0$.

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\dim E_2(A) = 2$ et A est diagonalisable.

Pour B :

$\chi_B(X) = X^3 - 2X^2 + X$

$= X(X^2 - 2X + 1)$

$= X(X-1)^2$

Donc B est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\dim E_1(B) = 2$

où $E_1(B) := \mathrm{Ker}(B - I_3)$

Or si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a :

$x \in E_1(B) \Leftrightarrow Bx = x \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 = x_1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 0$

Donc $E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\dim E_1(B) = 2$ et B est diagonalisable.

c) Soit $v \neq 0$ un vecteur propre pour A et pour B.

On a : $Sp(A) = \{1, 2\}$ donc

$Av = v$ ou $Av = 2v$.

si $Av = v$, alors $v \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et comme $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est stable par B (cf a)) et de dimension 1, forcément,

$Bv \in \mathbb{R}v$ et v est un vecteur propre de B automatiquement.

si $Av = 2v$, alors

$v \in E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

donc $v = \begin{pmatrix}x_1\\-2x_1\\x_3\end{pmatrix}$ pour certains $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, v est un ~~vecteur~~ vecteur propre de B si et seulement si $Bv \in \mathbb{R}v$.

Or $Bv = \begin{pmatrix}-x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix}$.

Donc $Bv \in \mathbb{R}v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix}-x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}x_1\\-2x_1\\x_3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \text{ et } \lambda = 0 \\ \text{ou} \end{cases}$

Conclusion :

un vecteur $v \neq 0$ dans $\mathbb{R}^3$ est un vecteur propre pour A et B si et seulement si $\begin{cases} v \in \mathrm{Ker}(A - I_3) \setminus \{0\} \\ \text{ou } v \in \left\{\begin{pmatrix}x_1\\-2x_1\\0\end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}-x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \end{cases}$

Comme $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, les vecteurs propres pour A et B sont les éléments de : $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \setminus \{0\} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \setminus \{0\} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \setminus \{0\}$

d) Soient $f_1 := \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ $f_3 := \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Ces 3 vecteurs $\underbrace{\text{forment une base de } \mathbb{R}^3}_{\text{car } f_1 \in \mathrm{Ker}(A-I_3) \text{ et } f_2, f_3 \in \mathrm{Ker}(A-\ldots) \text{ sont indép}}$ et :

$Af_1 = f_1, \quad Af_2 = 2f_2, \quad Af_3 = 2f_3$

$Bf_1 = f_1, \quad Bf_2 = 0, \quad Bf_3 = f_3$

Donc si $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & -2 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans f_1, f_2, f_3) on a :

$A = P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{-1}$ et $B = P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}P^{-1}$.

Calcul de P^{-1} : $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t\tilde{P} = -{}^t\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\-1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\ [illegible] & 1 & 1\end{pmatrix}$

7/10

Exercice 3

a) $E = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3}$ forment une base de E.

b) si X est symétrique, alors

$$^t({}^tAXA) = {}^tA\,{}^tX A = {}^tAXA$$

donc ${}^tAXA$ est aussi symétrique.

$$^tA\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x+4y+z & 2y+z \\ 2y+z & z \end{pmatrix}$$

$$= (4x+4y+z)\,e_1 + (2y+z)\,e_2 + z\,e_3$$

Donc la matrice de $X \mapsto {}^tAXA$ dans la base e_1, e_2, e_3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8/10

c) $\det A = 8 \neq 0$ donc A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

a) La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\chi_u(X) = \chi_A(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

$$= (X-1)^3$$

Donc le polynôme minimal de u est

$m_u(X) = X-1$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$

or $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{20} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq 0$

donc $m_A(X) = m_u(X) = (X-1)^3$.

9/10

c) le polynôme $m_u(X)$ n'est pas à racines simples. (1 est racine triple) donc u n'est pas diagonalisable.

d) $(A-I_3)^2$ a une première colonne non nulle.

Donc $(u-I)^2(w) \neq 0$ si $w = (1,0,0)$

Si (*) $\lambda w + \mu (u-I)(w) + \nu (u-I)^2(w) = 0$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Alors si on applique $(u-I)^2$ à (*) on trouve : $\lambda (u-I)^2(w) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

(car $(u-I)^2(w) \neq 0$)

donc $\mu (u-I)(w) + \nu (u-I)^2(w) = 0$.

Si on applique $(u-I)$ on trouve :

$\mu (u-I)^2(w) = 0$

donc $\mu = 0$.

Donc $\nu . (u-I)^2(w) = 0$

et $\nu = \mu = \lambda = 0$.

Donc $w, (u-I)(w), (u-I)^2(w)$ sont indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$.

10/10

On a :

$u(w) = w + (u-I)(w)$

$u((u-I)(w)) = (u-I)(w) + (u-I)^2(w)$

$u((u-I)^2(w)) = (u-I)^2(w) + \underbrace{(u-I)^3(w)}_{=0}$

donc dans la base $w, (u-I)(w), (u-I)^2(w)$, la matrice de u est la matrice

$$J_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$