Université Lyon 1
Math-III-algèbre — semestre d'automne 2010
Contrôle continu écrit n° 1
lundi 8 novembre 2010
durée : 2h
documents et calculatrices interdits

Exercice 1 *Soit* $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Calculer son polynôme minimal.
b) Calculer A^{-1}.
c) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\binom{n}{2} := \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2 *Soient :*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \; B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Calculer AB et BA. En déduire que les espaces propres de A sont stables par B.
b) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
c) Trouver les vecteurs qui sont des vecteurs propres à la fois pour A et pour B.
d) Trouver une matrice inversible P et deux matrices diagonales D, D' telles que :

$$A = PDP^{-1} \text{ et } B = PD'P^{-1} .$$

Calculer P^{-1}.

Exercice 3 *Soit E l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles 2×2 :*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} .$$

a) Donner une base de E.
b) Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $X \in E$, ${}^tAXA \in E$. Donner la matrice de l'application linéaire :

$$E \to E \; , \; X \mapsto {}^tAXA$$

dans la base trouvée en a).
c) La matrice trouvée en b) est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 4 *Soit* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme défini par :*

$$^{\forall}\, x, y, z \in \mathbb{R},\ u(x, y, z) = (2x + 5y - 3z, 2x + y + 4z, -3x - 5y)\ .$$

a) Déterminer la matrice de u *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer le polynôme caractéristique de u *et son polynôme minimal.*

c) L'endomorphisme u *est-il diagonalisable ?*

d) Trouver un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2(w) \neq 0$. *Montrer que* $w, (u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(w), (u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2(w)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Quelle est la matrice de* u *dans cette base ?*