Université Lyon 1 Algèbre III

Corrigé du contrôle du 7/11/11

Exercice 1

a) $\begin{vmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} = 1$ donc A est inversible d'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

A ne possède qu'une seule valeur propre : 1

Donc si A était diagonalisable, A serait semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c-à-d A serait égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ absurde !

A n'est pas diagonalisable

Exercice 2

a) Les valeurs propres de B sont 1 et 3.

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 2x+3y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0$$

Donc : $\mathrm{Ker}(B - I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x \\ 2x+3y = 3y \\ z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow x=z=0$$

Donc $\mathrm{Ker}(B - 3I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : $B = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) Les valeurs propres de A sont 1 et 3 mais A n'est pas semblable à B

en effet : $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rang}(A - I_3) = 2 \neq 1 = \mathrm{rang}(B - I_3)$

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

a) La matrice B est de rang 1. D'après le théorème du rang:

$\dim \operatorname{Ker} B = \dim \operatorname{Ker}(A+I_n) = n-1$

-1 est une valeur propre de A et l'espace propre associé $\operatorname{Ker}(A+I_n)$ est de dimension $n-1$.

b) $$A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $n-1$ est une valeur propre de A.

c) $$\underbrace{\dim \operatorname{Ker}(A+I_n)}_{=n-1} + \underbrace{\dim (A-(n-1)I_n)}_{\geq 1} \geq n$$

donc A est diagonalisable de valeurs propres -1 et $n-1$ de multiplicités géométriques respectives $n-1$ et 1

D'où: $\chi_A(X) = (X+1)^{n-1}(X-(n-1))$

d) $$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$\iff x_1 + \cdots + x_n = 0$

Donc les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base

de $\operatorname{Ker}(A+I_n)$. Conclusion: $A = PDP^{-1}$ où:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ -1 & \ddots & & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & -1 & \\ 0 & & & n-1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

a) $\chi_u(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$
$= (X-2)^3$

b) D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$f^3 = (u - 2\,\mathrm{Id}_E)^3 = \chi_u(u) = 0$$

c) Dans la base e_1, e_2, e_3, f^2 a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \\ -11 & 1 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -10 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

En particulier $f^2(e_1) = \begin{pmatrix} -10 \\ * \\ * \end{pmatrix} \neq 0$

d) Puisque E est de dimension 3, il suffit de montrer que les vecteurs $x, f(x), f^2(x)$ sont linéairement indépendants.

Or si $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0$, on a :

$$0 = f^2(ax + bf(x) + cf^2(x)) = af^2(x) + b\underbrace{f^3}_{=0}(x) + c\underbrace{f^4}_{0}(x) = af^2(x)$$

d'où $a=0$ car $f^2(x)\neq 0$.

Donc : $b f(x) + c f^2(x) = 0$

$$\Rightarrow 0 = f(b f(x) + c f^2(x))$$

$$= b f^2(x) + c \underbrace{f^3(x)}_{=0}$$

$$= b f^2(x)$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

Donc $x, f(x), f^2(x)$ est une base de E

e) Dans cette nouvelle base $(x, f(x), f^2(x))$, f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } f(f^2(x)) = f^3(x) = 0$$

Puisque $u = f + 2\,Id_E$

La matrice de u dans la base $x, f(x), f^2(x)$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$