Université Lyon 1
Algèbre III – diagonalisation et applications
semestre d'automne 2011
Contrôle continu écrit n° 1
lundi 7 novembre 2011
durée : 2h
documents et calculatrices interdits

Exercice 1 *Soit A la matrice complexe* $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 *On pose :*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Diagonaliser B.

b) La matrice A est-elle semblable à B ?

Exercice 3 *Soit $n \geq 2$. Soit A la matrice réelle $n \times n$ de coefficients $A_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $A_{i,i} = 0$ pour tout i. On pose $B = A + I_n$.*

a) Quel est le rang de la matrice B ? En déduire que -1 est une valeur propre de A et déterminer la dimension de l'espace propre associé.

b) Calculer :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

et en déduire une nouvelle valeur propre de A.

c) Justifier que A est diagonalisable puis donner son polynôme caractéristique.

d) Donner une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1}).

Exercice 4 *Soit E un espace vectoriel réel de base e_1, e_2, e_3. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base e_1, e_2, e_3 est :*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \\ -11 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Quel est le polynôme caractéristique de u ?

b) On pose $f := u - 2\mathrm{Id}_E$. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, déterminer f^3.

c) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $f^2(x) \neq 0$.

d) Montrer que les vecteurs $x, f(x), f^2(x)$ forment une base de E (indication : si a, b, c sont des réels tels que $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0$, justifier que $a = 0$ en appliquant f^2 à cette égalité).

e) Quelle est la matrice de u dans cette nouvelle base ?