PLANCHE D'EXERCICES II

- DIAGONALISATION - TRIGONALISATION -

Exercice 1.★ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ est vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 2.★ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $u(\mathbf{e}_2)$, $u(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$ et $u(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$.
2. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.
3. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 3.★ Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u.
2. Montrer sans calcul qu'il existe une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base formée de vecteurs propres.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$?

Exercice 5.★ Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. Discuter en fonction de a, b et c la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de $\mathbf{A}$, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de $\mathbf{A}$, de même ordre de multiplicité.
2. Montrer que si $\mathbf{v}$ est un vecteur propre associé à λ, alors $\overline{\mathbf{v}}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.
3. Diagonaliser en donnant une matrice de passage la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Calculer $\mathbf{A}^k$ pour tout entier naturel k.

Exercice 8.★ On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Résoudre l'équation $u(P) = P$.

Exercice 9.★ Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$u\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.

Exercice 10.★ Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En diagonalisant $\mathbf{A}$, trouver une solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $X^2 = \mathbf{A}$.

Exercice 11.★ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de rang un.

1. Montrer que la trace de u est une valeur propre de u.
2. En déduire que u est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

Exercice 12.★ On considère la matrice complexe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$?
2. Quel est le produit des valeurs propres de $\mathbf{A}$?
3. Montrer que, si son déterminant n'est pas nul, $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
4. Montrer que, si son déterminant est nul, $\mathbf{A}$ n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable sauf si elle est de rang un.
6. En supposant que la matrice $\mathbf{A}$ est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On considère l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u :

$$\mathrm{Com}_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$

1. Montrer que Com_u est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. On suppose que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u.

2.1. Montrer que

$$\mathrm{Com}_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid E_{\lambda_i} \text{ est stable par } v, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, p\}\}.$$

2.2. Ecrire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme $v \in \mathrm{Com}_u$ dans la base $B = B_1 \cup \dots \cup B_p$, où pour tout i, B_i est une base de E_{λ_i}. En déduire que

$$\dim \mathrm{Com}_u = \sum_{i=1}^{p} (\dim E_{\lambda_i})^2.$$

3. On suppose que u admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On veut montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel Com_u coïncide avec le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}\langle \mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1}\rangle$, librement engendré par les endomorphismes $\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1}$.

3.1. Montrer que $\mathbb{K}\langle \mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1}\rangle \subset \mathrm{Com}_u$.

3.2. Soit n scalaires $a_0, \dots, a_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} a_i u^i = 0$. Montrer que les a_i sont solutions du système linéaire :

$$(*) \begin{cases} a_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_1^2 + \dots + a_{n-1}\lambda_1^{n-1} & = 0 \\ a_0 + a_1\lambda_2 + a_2\lambda_2^2 + \dots + a_{n-1}\lambda_2^{n-1} & = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1\lambda_n + a_2\lambda_n^2 + \dots + a_{n-1}\lambda_n^{n-1} & = 0 \end{cases}$$

3.3. Soit

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

la matrice associée au système $(*)$. Montrer par récurrence que

$$\det(\mathbf{V}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

3.4. Conclure.

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

2. Montrer que u et v sont diagonalisables si et seulement s'il existe une base commune de diagonalisation.

Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés respectivement dans la base canonique par les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Montrer que u et v commutent.

4. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de u et v.

5. Déterminer deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ invariant par u et v dont l'un est de dimension 1 et l'autre de dimension 2.

6. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ trigonalisant les endomorphismes u et v.

Exercice 15.* Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et Q un sous-ensemble irréductible d'endomorphismes de E, i.e., les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec tout les éléments de Q, il existe une valeur propre λ dont le sous-espace propre est E.

2. En déduire que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec les éléments de Q sont les homothéties.

3. Dans le cas où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, montrer en trouvant un contre exemple que le résultat précédent est faux.

4. Montrer que le résultat est vrai si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie impaire.

Exercice 16. On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable et diagonaliser $\mathbf{A}$.

2. Soit $\mathbf{N}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ défini par blocs :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & -\mathbf{N} \\ 2\mathbf{N} & 4\mathbf{N} \end{bmatrix}.$$

Montrer que la matrice $\mathbf{M}$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice $\mathbf{N}$ est diagonalisable.