PLANCHE DE TRAVAUX APPLIQUÉS II
- DES PUISSANCES ET DES APPLICATIONS

1. CALCUL DE PUISSANCES ET D'INVERSES

– **Puissances –** On considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

➢ Sans utiliser la commande `**` sur les objets de type `Matrix`, calculer les puissances $\mathbf{A}^n$, $n \in \mathbb{N}$, de trois façons différentes :

- en utilisant les projecteurs spectraux,
- en exploitant le fait que le polynôme minimal de la matrice **A** est de degré 2,
- en exploitant le fait que la matrice **A** est diagonalisable. (La méthode `eigenmatrix_right()` retourne la matrice diagonale et une matrice de passage d'une matrice diagonalisable).

➢ Écrire une fonction Sage qui prend une matrice `A` en argument et un entier `n` et retourne la puissance `A**n` en utilisant la troisième méthode.

Pour définir une fonction avec Sage, on utilise la commande `def`. Par exemple la fonction $x \longmapsto x^2$:

```
sage: def carre(x):
...       return x^2
sage: carre(3)
9
sage: A = Matrix([[1,1],[1,1]])
sage: carre(A)
[2 2]
[2 2]
```

La fonction de deux variables $(x, y) \longmapsto \cos^2(x) + \sin^2(y)$.

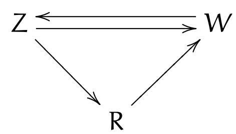
```
sage: def fonc(x,y):
          return cos(x)^2 + sin(y)^2
sage: fonc(pi/3,pi/2)
5/4
```

– **Polynôme caractéristique et inverse –** Soit **A** une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
➢ Montrer que si 0 n'est pas valeur propre de **A**, la matrice **A** est inversible.
➢ En utilisant le polynôme caractéristique de **A**. Exprimer l'inverse de **A** comme un polynôme en **A**.
➢ Écrire un fonction qui prend en argument une matrice inversible et retourne son inverse en utilisant l'expression précédente. On pourra utiliser la méthode `shift(n)` qui multiplie un polynôme par X^n :

```
sage: x = PolynomialRing(QQ,'x').gen()
...   p = 3*x^3 + 2*x^2 + x
...   print p.shift(2)
...   print p.shift(-1)
3*x^5 + 2*x^4 + x^3
3*x^2 + 2*x + 1
```

➢ Tester cette fonction. Calculer l'inverse de la matrice de la section précédente.

2. « COMBIEN DE CHEMINS MÈNENT À ROME ? »



« Un pilote vole tous les jours vers une des trois villes R, W, Z*. La figure ci-dessus indique les trajets journaliers autorisés : un trajet de* R *vers* W*, un trajet de* W *vers* Z*, un de* Z *vers* R *et un de* Z *vers* W*. À côté de ces trajets journaliers (de « longueur 1 »), nous considérons les itinéraires (composés) de longueur* n*, qui décrivent les chemins possibles parcourus pendant* n *jours consécutifs. Ainsi deux itinéraires de longueur* 4 *mènent de* Z *à* W*, alors qu'il n'y en a qu'un de* Z *à* R *:*

$$Z \longrightarrow R \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow W$$
$$Z \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow R \longrightarrow W$$
$$Z \longrightarrow R \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow R$$

Cherchons le nombre d'itinéraires de longueur 100 *de* Z *vers* R*. Pour cela, nous numérotons respectivement* $1, 2, 3$ *les villes* R, W, Z *et désignons par* $\mathbf{M}^i_j$ *le nombres de trajets (de longueur* 1*) de* j *à* i*. »*[1]

➢ Écrire la matrice **M** formée des coefficients $\mathbf{M}^i_j$.
➢ Montrer que le nombre d'itinéraires de longueur n de j à i est égal au coefficient $(\mathbf{M}^n)^i_j$ de la matrice $\mathbf{M}^n$.
➢ Calculer le nombre d'itinéraires de longueur 100 de Z vers R.
➢ Déterminer les valeurs propres de la matrice **M**. La matrice **M** est-elle diagonalisable ?

3. MATRICES STOCHASTIQUES

– Chaînes de Markov – Une *chaîne de Markov* est un processus stochastique dans lequel la prédiction du futur à partir du présent ne dépend pas du passé. Formellement, une *chaîne de Markov en temps discret* est une suite de variables aléatoires $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ prenant leurs valeurs dans un même ensemble d'états E, appelé l'*espace des états*, et vérifiant, pour tout entier $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(X_{t+1} = e \mid X_0, X_1, \ldots, X_t) = P(X_{t+1} = e \mid X_t),$$

où e est un état quelconque du processus.

On peut voir une telle chaîne de Markov comme une suite d'événements aléatoires ayant lieu à des points discrets $t = 0, 1, 2, \ldots$ du temps, et où X_t représente l'état de l'événement à l'instant t. La propriété ci-dessus exprime que le processus est « sans mémoire », i.e., l'état de l'événement à l'instant $t + 1$ dépend uniquement de l'état de l'événement à l'instant t et non pas des états aux instants précédents.

Si l'espace des états possibles E est fini, on parle de *chaîne de Markov à espace d'états fini*. Dans ce cas, on peut représenter la chaîne de Markov par une matrice $\mathbf{P}(t)$, dont le coefficient $(\mathbf{P}(t))^j_i$ est défini par

$$\mathbf{P}^j_i(t) = P(X_{t+1} = e_i \mid X_t = e_j),$$

exprimant la probabilité que le processus se trouve dans l'état e_i à l'instant $t + 1$, alors qu'il était dans l'état e_j à l'instant t. La matrice $\mathbf{P}(t)$ est appelée la *matrice de tansition du processus*. Dans la suite, on s'intéressera à des processus dont la matrice de transition est constante, i.e., indépendante du temps. La probabilité $\mathbf{P}^j_i$ de passer de l'état e_j à l'état e_i est indépendante du temps.

[1] Extrait de *Matrices, géométrie, algèbre linéaire*, Pierre Gabriel, Cassini (traduction française), (2001).

– **Matrices stochastiques** – On appelle *matrice stochastique* une matrice carrée réelle, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et dont la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1. La matrice suivante est stochastique

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

➢ Se convaincre que la matrice représentant une chaîne de Markov à espace d'états fini est une matrice stochastique et qu'inversement toute matrice stochastique définit une telle chaîne de Markov.
➢ Montrer que toute matrice stochastique possède 1 comme valeur propre. Déterminer un vecteur propre pour cette valeur propre.
➢ Écrire une fonction permettant de vérifier qu'une matrice est stochastique.
➢ Montrer que si $\mathbf{P}$ est stochastique, alors $\mathbf{P}^k$ est stochastique, pour tout entier $k \geqslant 1$.

Soit $\mathbf{P}$ une matrice stochastique dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. On note $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres différentes de 1. On suppose que pour tout i, $|\lambda_i| < 1$ et que $\mathbf{P}$ est diagonalisable.
➢ Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{P}^k$ en utilisant la décomposition spectrale de la matrice $\mathbf{P}$.

– **Distribution de probabilité** – Considérons une chaîne de Markov à n états et soit $\mathbf{P}$ sa matrice de transition. On appelle *vecteur de distribution de probabilité* un vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{tel que} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

On notera $\mathbf{x}^\top = [x_1 \ \ldots \ x_n]$ le vecteur ligne correspondant. Le k-ème *vecteur de distribution de probabilité* de la chaîne de Markov est defini par

$$\mathbf{p}^\top(k) = [p_1(k) \ \ldots \ p_n(k)],$$

où $p_i(k) = P(X_k = e_i)$ est la probabilité d'être dans l'état e_i après la k-ème étape. Le vecteur de distribution initial est

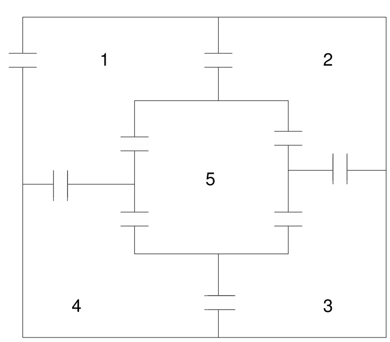
$$\mathbf{p}^\top(0) = [p_1(0) \ldots p_n(0)],$$

avec $p_i(0) = P(X_0 = e_i)$.

Montrer que

$$\mathbf{p}^\top(k) = \mathbf{p}^\top(0)\mathbf{P}^k.$$

– **Au musée** – La situation suivante fournit un exemple de chaîne de Markov. Un visiteur se promène dans un musée. À chaque étape de sa visite, il change de salle en prenant une porte au hasard pour passer à la salle suivante. Passionné, notre visiteur va passer le restant de ses jours à poursuivre sa visite, sans plus jamais sortir du musée. Le plan du musée ci-dessous indique la position des salles et de leurs portes :



L'entrée du musée donne sur la salle 1, si bien que le vecteur de distribution initial est

$$\mathbf{p}^\top(0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0].$$

Les déplacements du visiteur d'une salle à l'autre définissent une chaîne de Markov ; un état représente ici la présence du visiteur dans une salle.

➢ Écrire la matrice stochastique **P** de cette chaîne de Markov.

Pour $i = 1 \dots 5$, notons $p_i(k)$ la probabilité que le visiteur se trouve dans la i-ème salle après l'étape k. Soit $\mathbf{p}^\top(k) = [p_1(k)\ \dots\ p_5(k)]$ la distribution de probabilité à l'instant k.

➢ Se convaincre que le coefficient $(\mathbf{P}^k)_i^j$ représente la probabilité de passer de la salle i à la salle j en exactement k étapes.

➢ Calculer la probabilité que le visiteur se trouve dans la salle 3 en exactement 1, 2, 3 et 4 étapes.

➢ Déterminer les valeurs propres de **P**. La matrice **P** est-elle diagonalisable ?

➢ En utilisant les procédures construites dans les travaux pratiques précédents, calculer les projecteurs spectraux de **P**.

➢ Exprimer **P** en fonction des projecteurs spectraux. En déduire la valeur de $\mathbf{p}(k)$ en fonction de $\mathbf{p}(0)$ et des projecteurs spectraux.

➢ Calculer la probabilité que le visiteur se trouve dans la salle 3 à la k-ème étape avec la distribution initiale $\mathbf{p}^\top(0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$.

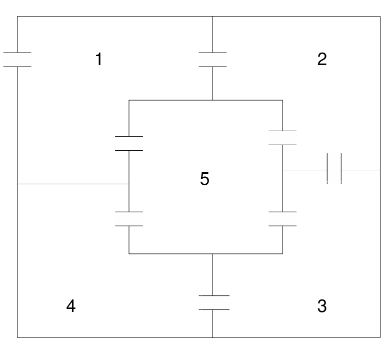
➢ Calculer $\mathbf{p}(10)$, $\mathbf{p}(20)$ avec la distribution initiale $\mathbf{p}^\top(0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$. Qu'observez-vous ?

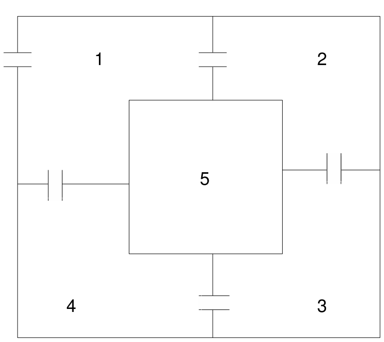
➢ Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{p}^\top(k)$ avec la distribution initiale $\mathbf{p}^\top(0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ en utilisant la décomposition spectrale de **P**.

Si $\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5]$ désigne le vecteur limite. On peut interpréter cette *distribution de probabilité limite* en disant qu'à terme le visiteur aura passé en proportion q_i de son temps dans la salle i.

➢ Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{p}^\top(k)$ avec la distribution initiale $\mathbf{p}^\top(0) = [1/5\ \ 1/5\ \ 1/5\ \ 1/5\ \ 1/5]$. C'est la distribution que l'on peut considérer si le visiteur débute sa visite en choisissant au hasard l'une des cinq salles.

Dans ce qui suit, le visiteur entre toujours par la porte de la salle 1, mais quelques modifications ont été apportées. Dans le premier cas, la porte qui relie les salles 1 et 4 a été bouchée. Dans le second cas, la salle 5 a été condamnée, sa visite est impossible. Les plans correspondant à ces deux cas sont respectivement





Dans chaque cas, calculer la distribution de probabilité limite.